

Karl-Wilhelm Hirsch

**Untersuchungen
über die Berechnung von
Ultraschall-Biegewellenleitern**

Dissertation

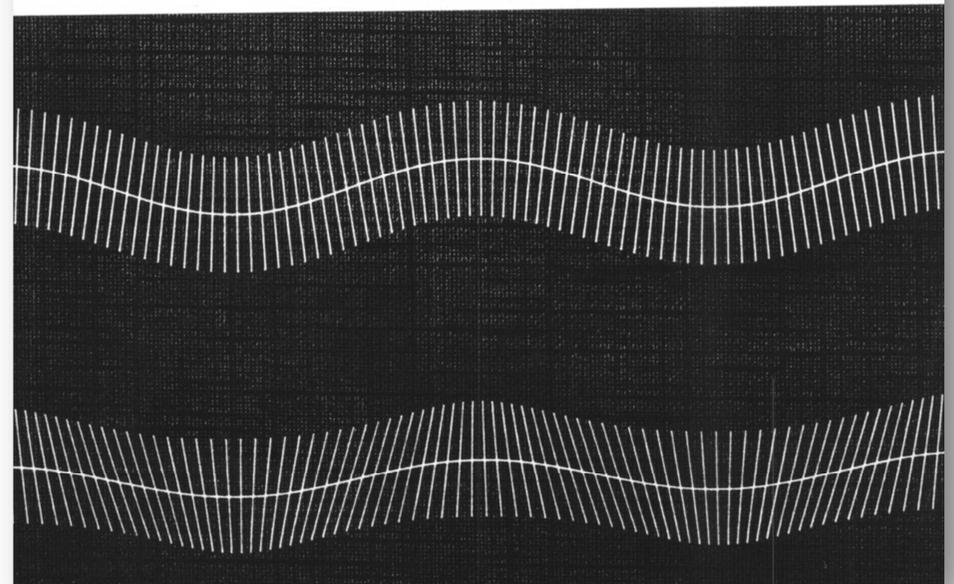
Mercator Universität Duisburg

1989

Gescannt von Cervus Consult GmbH, Willich, 09.04.2012

K.-W. Hirsch

**Untersuchungen
über die Berechnung von
Ultraschall- Biegewellenleitern**



meinem Vater

**Untersuchungen über die Grundlagen
der Berechnung von
Ultraschall-Biegewellenleitern**

vom Fachbereich Elektrotechnik der
Universität
- Gesamthochschule -
Duisburg

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor - Ingenieurs
genehmigte Dissertation

vorgelegt von
Diplom-Physiker Karl-Wilhelm Hirsch
aus Villigst/NRW

Referent: Prof. Dr.-Ing. Joachim Herbertz
Korreferent: Prof. Dr. rer. nat. Manfred Braun
Tag der mündlichen Prüfung 2. Juni 1989

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Elektroakustik und Ultraschalltechnik der Universität - Gesamthochschule - Duisburg.

Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Herbertz danke ich für die Anregung zu dieser Dissertation und für sein lebhaftes und stets förderndes Interesse bei der Durchführung der Untersuchungen.

Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr. rer. nat. M. Braun für die kritische Durchsicht der Arbeit und für wertvolle Hinweise.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1 Einleitung	
1.1 Einführung	1
1.2 Problemstellung	2
2 Bekannte Beschreibungen der Biegung	
2.1 Einführung	4
2.2 Bilder der Balkenbiegung	6
2.2.1 Einführung	6
2.2.1.1 Bezeichnungsweise am Balken	7
2.2.1.2 Einfache Balkenbiegung	9
2.2.2 BERNOULLI-Bild	10
2.2.3 Berücksichtigung der Schubelastizität und der Querkontraktion	10
2.2.4 Berücksichtigung der Verwölbung	11
2.2.5 Berücksichtigung dynamischer Aspekte	12
2.3 Elastodynamische Theorien	13
2.3.1 Klassische Theorien	13
2.3.1.1 Masse-Feder-Theorie	13
2.3.1.2 Theorie elastischer Linien	14
2.3.2 Theorien der Elastizität	15
2.3.2.1 Kontinuumstheorie	15
2.3.2.2 Korpuskulartheorie	16
2.4 Modelle der Balkenbiegung	17
2.4.1 Modelle mit der Theorie der elastischen Linie	18
2.4.1.1 Elementare Modellbildung	19
2.4.1.2 Biegesteifigkeit	20
2.4.1.3 Drehträgheit	21
2.4.1.4 Schubsteifigkeit	22
2.4.1.5 Verwölbungs-Korrektion	25
2.4.1.6 TIMOSHENKO-Koeffizient	27
2.4.2 Modelle mit der Feder-Masse-Theorie	31
2.4.3 Modelle der Kontinuumstheorie	33
2.4.3.1 Theoretische Lastfälle der Biegung	33
2.4.3.2 Modellbildung	38

	Seite
3 Beurteilung der Modelle	
3.1 Einführung	42
3.2 Verletzung der Voraussetzungen der 'einfachen Balkenbiegung'	43
3.3 Auswahl der Meßverfahren	45
3.4 Bereitstellung der Bewertungsgrundlage	47
3.4.1 Auswahl eines Probekbalkens	47
3.4.2 Messungen am Probekbalken	47
3.4.3 Rechnungen am Probekbalken	51
3.5 Vergleich der Modelle	54
3.5.1 Resonanzfrequenzen	54
3.5.2 Schwingungsformen	61
3.5.3 Schlußfolgerung	72
4 Rechenmethoden	
4.1 Einführung	73
4.2 Differentialgleichungen des Balkenmodells	74
4.3 Energiemethoden	76
4.4 Integration der Schwingungsgleichungen	78
4.5 Matrixmethoden	80
4.6 Beurteilung der Rechenmethoden	83
5 Theorie gekoppelter Leitungspaare	
5.1 Einführung	86
5.2 Zur akustischen Vielorttheorie	87
5.2.1 Tore und Klemmengrößen eines Vieltores	87
5.2.2 Zum Gleichungssystem des Vieltores	89
5.2.3 Generalisierte Impedanz-, Admittanz- und Kettenmatrix	90
5.2.4 Reziprozitätstest des Gleichungssystems	92
5.3 Zustandsraum von Leitungswellen	93
5.3.1 Zustandsvektoren und lineare Abbildung	93
5.3.2 Kontragredientes Bezugssystem der Zustandsvektoren	94
5.3.3 Projektoren und Propagatoren	96
5.3.4 Produktintegration differentieller Kettenmatrizen	97
5.4 Leitungswellen an einer Grenzfläche	98

	Seite
5.5 Dehnwellenleiter als Einführung	101
5.5.1 Gleichungssystem des Dehnwellenleiters	101
5.5.2 Kontragredientes Bezugssystem und Leitungsoperatoren	102
5.5.3 Dehnwellen an einer Grenzfläche	105
5.5.4 Produktintegration einer differentiellen Kettenmatrix	107
5.5.5 Zur Reziprozität des Dehnwellenleiters	108
5.6 Biegewellenleiter	109
5.6.1 Gleichungssystem des Biegewellenleiters	109
5.6.2 Kontragredientes Bezugssystem und Leitungsoperatoren	110
5.6.3 Biegewellen an einer Grenzfläche	116
5.6.4 Produktintegration einer differentiellen Kettenmatrix	126
5.6.5 Zur Reziprozität des Biegewellenleiters	128
6 Zusammenfassung	132
7 Literaturverzeichnis	134
8 Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen	143

Anhang

A Modalanalyse eines Wellenleiters	
A 1 Beschreibung des Meßplatzes	I
A 2 Ablauf der Messung	IV
A 2.1 Übertragungsfunktion	IV
A 2.2 Amplitudenprofil	V
A 3 Auswertung	VI
A 3.1 Übertragungsfunktion	VI
A 3.2 Amplitudenprofil	VIII
A 4 Beispiele	IX
B Zu den numerischen Problemen beim Kettenmatrixverfahren	XIII
C Reziprozitätsbedingungen einer 4 x 4 Kettenmatrix	XVII

1 Einleitung

1.1 Einführung

In der Ultraschall-Energietechnik wird über die direkte Nutzung der akustischen Energie Arbeit an einer Last verrichtet. Wichtige Verfahren der Ultraschall-Energietechnik sind z.B. das Ultraschall-Schweißen, -Desintegrieren und -Bonden. Die dafür ausgelegten Ultraschall-Apparaturen bestehen aus einem elektroakustischen Wandler zur Erzeugung des Ultraschalls und aus einer Ultraschall-Leitung für den Transport der Energie zum Einsatzort. Für die Fortleitung des Ultraschalls im technischen Leistungsbereich kommen zunächst die Grundmoden von Stäben infrage: Dehnwellen, Torsionswellen und Biegewellen.

Die Wandler bilden mit den Schalleitern Resonanzsysteme. Die typischen Abmessungen der Systeme liegen deshalb in der Größenordnung akustischer Wellenlängen. Für viele Anwendungen sind zwar tiefe Frequenzen günstiger, aber zur Vermeidung von Lärmbelästigungen müssen Betriebsfrequenzen gewählt werden, die oberhalb des Frequenzbereiches liegen, in dem das menschliche Hörvermögen eine ausgeprägte Empfindlichkeit aufweist. Deshalb werden die Systeme im allgemeinen für Betriebsfrequenzen im Bereich 20 kHz bis 40 kHz ausgelegt; dem entsprechen Wellenlängen in der Größenordnung Dezimeter. Obwohl bei diesen Wellenlängen unter Verwendung hochfester Werkstoffe theoretisch Leistungen in der Größenordnung MW übertragen werden können, liegen heutige Anwendungen der Ultraschall-Energietechnik im unteren kW-Bereich.

Die Anwendbarkeit dieser Verfahren wird wesentlich von der an der Last maximal erreichbaren Schnelle bestimmt. Die piezoelektrischen oder magnetostriktiven Wandlerelemente erreichen - bedingt durch die technischen Aussteuerungsgrenzen der Wandlermaterialien - nur kleine akustische MACH-Zahlen. Deshalb muß die Ausgangsschnelle der Wandler in der Regel hochtransformiert werden. Diese Aufgabe wird von konturierten Wellenleitern übernommen, die als Resonanztransformatoren wirken. Das Wellenleitersystem ist deshalb hinsichtlich des Leistungstransports und der Schnelletransformation unter schalltechnischen und anwendungsspezifischen Gesichtspunkten auszulegen.

1.2 Problemstellung

Bisher werden in der Ultraschall-Energietechnik nur in seltenen Fällen Biegewellenleiter eingesetzt, obwohl sie im Vergleich zu den bevorzugt verwendeten Dehnwellenleitern Vorteile haben: sie erlauben z.B. mehr geometrische Freiheitsgrade bei der Einkopplung der Schalleistung in die Last und können generell kleiner ausgelegt werden.

Ein Grund für den seltenen Einsatz von Biegewellen in der Ultraschalltechnik ist darin zu sehen, daß aus ingenieurwissenschaftlicher Sicht einheitliche Konzepte in der wissenschaftlichen Literatur nicht enthalten sind. Die Aussagen unterschiedlicher Denkschulen stehen in der Regel beziehungslos nebeneinander und beziehen sich von vornherein auf Spezialfälle, die nicht ohne weiteres für Anwendungen in der Ultraschalltechnik verallgemeinert werden können. Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist es deshalb, zunächst im Sinne einer Methodenpflege eine sachgerechte Beschreibung des Biegewellenleiters auf die aus der Literatur bekannten Ansätze abzustützen. Dazu ist eine kritische Auswertung und Beurteilung insbesondere der Schlüsselveröffentlichungen aus dem Problemkreis Biegung erforderlich.

Ein weiterer Grund für den seltenen Einsatz von Biegewellen ist das Fehlen einer praxisgerechten Berechnungsmethode zur Auslegung von Biegewellenleitern. In der einschlägigen Literatur, z.B. in /1/, /2/, /3/, /4/ und /5/, werden zwar elementare Berechnungsverfahren vorgeschlagen, diese werden aber nicht den technischen Anforderungen gerecht. Einerseits sind diese Verfahren nicht geeignet, die Übertragungseigenschaften von Biegewellenleitungen qualitativ und quantitativ mit hinreichender Zuverlässigkeit vorauszusagen, andererseits fehlt den Verfahren zum Teil die Kompatibilität zu schon bestehenden systematischen Berechnungsverfahren für andere Komponenten der Ultraschall-Gerätetechnik.

Für elektrische Systeme stellt die Netzwerk- bzw. Leitungstheorie eine für alle Komponenten durchgängige, systematische Beschreibungsmethode dar. Mit Hilfe dieser Theorie ist es möglich, Bauelemente oder Bauelementgruppen, die durch Relationen zwischen Schnittstellen charakterisiert sind, zu Systemen zu vernetzen.

In der Ultraschall-Energietechnik wird zur Zeit angestrebt, eine vergleichbare, einheitliche und standardisierbare Charakterisierung ihrer Systemkomponenten im Rahmen einer akustischen Netzwerk- bzw. Leitungstheorie einzuführen /6/. Von der Anwendung einer Netzwerktheorie ist ein Fortschritt in der Ultraschall-Gerätetechnik zu erwarten, wenn mit Hilfe ihrer Kalküle eine durchgängig abgestimmte Auslegung der akustischen bzw. elektroakustischen Systeme technisch realisiert wird und so über den jetzigen Stand der Technik hinaus leistungsfähigere Geräte entwickelt werden.

Die elektrische Netzwerk- bzw. Leitungstheorie ist wegen der vergleichbaren physikalischen Grundlagen entscheidend von den Denk- und Rechenmodellen und der Begriffsbildung der Mechanik und Akustik geprägt worden. Umgekehrt ist in weiten Bereichen die Beschreibung akustischer Bauelemente und Leitungen isomorph zu der Beschreibung entsprechender elektrischer Systemelemente. Dies gilt z.B. für das Verhältnis von longitudinaler Dehnwellenleitung zur elektrischen Doppelleitung. Während in der elektrischen Leitungstheorie eine inhomogene Leitung durch Verkettung von elektrischen Vierpolen mit den Klemmengrößen Stromstärke und Spannung beschrieben wird, geschieht dieses im Fall des akustischen Dehnwellenleiters durch Verkettung von mechanischen Vierpolen mit den Klemmengrößen Kraft und Schnelle.

Jedes Leitungsstück einer Biegewellenleitung wird durch die Übertragungseigenschaften für die miteinander gekoppelten Klemmengrößenpaare Querkraft und Querschnelle bzw. Drehmoment und Drehgeschwindigkeit charakterisiert. Es stellt ein Viertor dar, das durch vier lineare Gleichungen mit frequenzabhängigen Koeffizienten zwischen seinen Klemmengrößen vollständig beschrieben wird. Diese Gleichungen lassen sich in Form einer Kettenmatrix formulieren. Die Übertragungseigenschaften einer Biegewellenleitung lassen sich daher durch Verkettung von Viertoren methodisch beschreiben.

Die Achtpoldarstellung eines Biegebalkens ist bereits eingeführt /7/; sie wird bisher aber nicht systematisch genutzt. Allerdings wird in /8/ und /9/ gezeigt, daß die Produktintegration differentieller Kettenmatrizen zu guten numerischen Ergebnissen bei der Berechnung der Resonanzfrequenzen von Biegeschwingern führt.

Weil eine geeignete mathematische Formulierung der Leitungstheorie gekoppelter Leitungspaare mit verschiedenartigen Klemmengrößenpaaren fehlt, konnte bisher die analytische Darstellung der Leitungseigenschaften von Biegewellenleitern auf der Basis eines hinreichend zuverlässigen Biegemodells nicht behandelt werden. Ein weiteres Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die Ansätze einer solchen Leitungstheorie zu entwickeln, um entsprechend den Anforderungen der Ultraschall-Energietechnik die Berechnung der Biegewellen hinsichtlich der Aspekte Ausbreitung, Leistungstransport sowie Reflexion und Transmission an einer Inhomogenität und hinsichtlich der Resonanzerscheinungen zu ermöglichen.

2 Bekannte Beschreibungen der Biegung

2.1 Einführung

GALILEI war der erste, der die Biegung eines Balkens in eine wissenschaftliche Frage kleidete. Er untersuchte den einseitig eingemauerten Balken und versuchte seinen Widerstand gegen Verbiegung und die Geometrie der Drehung unter der Wirkung seines Eigengewichtes und einer äußeren Last anzugeben. Diese Fragestellung ist als sogenanntes 'GALILEI'sches Problem' in die Literatur eingegangen.

Unter Biegung versteht man heute allgemein die Geometrie eines Verschiebungsfeldes eines elastisch verformten Festkörpers, die durch Momente um eine zur Ebene der Verformung senkrechte Achse und durch Querkräfte in dieser so definierten Biegeebene erzeugt wird. Die Berechnung der Biegung in mechanischen Systemen ist eine der wichtigsten Fragestellungen in der theoretischen und technischen Mechanik, weil sich die meisten anwendungsbezogenen Probleme auf die Biegung von Balken, Platten und Schalen zurückführen lassen. Die Literatur zur Biegung umfaßt daher Berichte aus den verschiedensten Bereichen der Ingenieurwissenschaften und der Physik. Sie ist häufig eingebettet in eine spezialisierte Problemstellung dieser Fächer mit vorgegebenem Ziel der Analyse.

Der Zeitraum, aus dem die auch heute noch maßgebenden Arbeiten stammen, reicht bis in das 18. Jahrhundert zurück. Die jeweils herrschende Anschauung vom Aufbau der Materie und der Fortschritt der Mathematik prägen Sprache, Modelle und Rechenmethoden. Stand früher das Auffinden analytischer Lösungen und Näherungen im Mittelpunkt der Forschung, richtet sich in der modernen Literatur mit der Einführung der Großrechenanlagen das Augenmerk vornehmlich auf Modelle und Methoden, die der numerischen Rechnung eher zugänglich sind; der erhebliche mathematische Aufwand bei der Berechnung elastischer Körper ist geblieben.

Die Fülle der zum Thema erschienen Veröffentlichungen ist nahezu unübersehbar. LEISSA nennt in seiner Dokumentation /10/ für den Berichtszeitraum 1976 bis 1979 allein 75 ihm zugängliche Literaturstellen, die sich mit nicht konturierten, isotropen Balken bzw. Platten im Rahmen der linearen, klassischen Betrachtungsweise befassen. Wegen der Komplexität des Problems sind die Veröffentlichungen durch einen Mangel an Übereinstimmung in den Ansätzen, Methoden und Zielen gekennzeichnet, so daß ein vernünftiges Ordnungskriterium für einen systematischen Überblick nicht ersichtlich ist. Es wird daher eine analytische Vorgehensweise erforderlich, die darauf gerichtet ist, die wichtigsten Gesichtspunkte bei der Beschreibung und Berechnung der Biegung unter dem besonderen Aspekt der BiegeWellenleiter in der Ultraschalltechnik herauszuarbeiten.

Ausgangspunkt der Betrachtungen sind die im folgenden als "Bilder" bezeichneten phänomenologischen Beschreibungen und anschaulichen Vorstellungen von der Biegung, die auf Beobachtung und Erfahrung beruhen.

Die Ansätze auf der Basis axiomatischer Hypothesen der mathematischen Physik, die zur mathematischen Beschreibung der Biegung herangezogen werden, werden im folgenden mit dem Begriff "Theorie" umschrieben. Die Diskussion dieser Theorien ist der zweite Schritt dieser Vorgehensweise.

Als nächster und entscheidender Schritt folgt die Synthese aus einem Bild und einer Theorie; das Ergebnis dieser Synthese wird hier als "Modell" bezeichnet. Bei der Modellbildung ergibt sich jeweils die Notwendigkeit, die in dem Bild zur Beschreibung der Biegung auftretenden Parameter auf die von der Theorie angebotenen Parameter abzubilden. In der Regel sind die Parameter in Bild und Theorie nicht deckungsgleich. Deshalb werden für die Bildung eines Modells in der Regel Vereinfachungen und Hypothesen am Bild und Vernachlässigungen und sinnfällige Korrekturen im Bereich der Theorie eingeführt.

Die Zuordnung zwischen Bild, Theorie und Modell soll am einfachen Beispiel der physikalischen Beschreibung eines Perpendikels erläutert werden. In einem allgemein einsichtigen Bild eines Perpendikels besteht die Anordnung z.B. aus einer Metallscheibe, die, an einem balkenförmigen Steg aufgehängt, im Schwerfeld periodische Bewegungen ausführt. Eine anwendbare Theorie ist die Theorie des harmonischen Oszillators, die die Bewegung eines Massepunktes in einem von seiner Auslenkung aus der Gleichgewichtslage quadratisch abhängenden Potential beschreibt.

Um aus dem Bild und der Theorie ein Modell der Anordnung zu entwickeln, ist es erforderlich, das Bild zu vereinfachen. Diese Vereinfachung kann drastisch ausfallen, wenn der Steg nahezu als masselos angenommen werden darf und die Metallscheibe klein ist im Vergleich zur Länge des Steges (mathematisches Pendel). Dann kann man die Masse der Metallscheibe und des Steges im Schwerpunkt der Metallscheibe konzentriert annehmen. Diese Masse ist bei der Modellbildung der Masse des Massepunktes in der Theorie zugeordnet; die Lage des Schwerpunktes der Metallscheibe wird durch die Lage des Massepunktes gekennzeichnet. Das sich ergebende Modell eines Pendels ist auf kleine Auslenkungen zu beschränken, um die Potentialbedingung näherungsweise zu erfüllen.

Ist die Metallscheibe nicht mehr als klein gegen die Länge des Steges zu betrachten, ist die Masse des Massepunktes in der Theorie aus der Drehträchtigkeit der Anordnung abzuleiten und der sogenannte Schwingungsmittelpunkt in dem vereinfachten Bild ist der Lage des Massepunktes in der Theorie zuzuordnen (physikalisches Pendel).

Bei der Auswertung der Literatur zeigt sich immer wieder, daß die kritische Trennung zwischen den Einflüssen aus dem Bild und denen aus der Theorie für die Bewertung der Aussagekraft eines Modells von prinzipieller Bedeutung ist. Nach diesen ersten drei Schritten werden Modelle im Hinblick auf ihre Nutzung für BiegeWellenleiter beurteilt.

Erst nach der Beurteilung der Modelle ist der vierte und letzte Schritt der Analyse notwendig: die Untersuchung der Rechenmethoden zur Bestimmung der für die Ultraschall-Energetechnik interessanten Zielgrößen. Die Bewertung der Rechenmethoden ist erforderlich, weil innerhalb der Modelle nur in seltenen Fällen exakte Lösungen möglich sind. In der Regel stehen nur analytische Näherungen oder numerische Auswertungsverfahren zur Verfügung. Dazu müssen besonders die Aspekte herausgearbeitet werden, die zur Begründung und zur Einordnung des später vorgestellten Berechnungsverfahrens für Biegewellenleiter maßgeblich sind.

Durch die Trennung des Problems der physikalischen Beschreibung der Biegung von dem Problem der mathematischen Berechnung wird einerseits erreicht, daß die Diskussion der qualitativen und quantitativen Vor- und Nachteile der Modelle vordergründig nicht durch mathematische Probleme überdeckt wird. Andererseits läßt sich die Diskussion der Rechenmethoden im wesentlichen auf die in diesem Zusammenhang als sachgerecht erkannten Modelle beschränken.

2.2 Bilder der Balkenbiegung

2.2.1 Einführung

Die in der Literatur verwendeten Begriffsbildungen zur Balkenbiegung sind im deutschen und englischen Sprachraum nicht eindeutig und bieten vielerlei Ansätze zu Mißverständnissen und Fehlern. Deshalb ist es zunächst unumgänglich, die in der vorliegenden Arbeit verwendete Sprachregelung im folgenden Abschnitt 2.2.1.1 niederzulegen.

Die Einschränkung des allgemeinen Biegeproblems auf Biegewellenleiter für die Ultraschall-Energetechnik erlaubt, die Bilder der Biegung auf die typischen Rahmenbedingungen der Ultraschalltechnik zu beschränken und unter zusätzlichen Einschränkungen eine Klasse der Biegung zu definieren, die im folgenden als 'einfache Balkenbiegung' bezeichnet wird. Die Einschränkungen werden im Abschnitt 2.2.1.2 präzisiert.

2.2.1.1 Bezeichnungweise am Balken

Der Balken wird in einem raumfesten, rechtwinkligen, rechtshändigen Koordinatensystem x,y,z beschrieben. Er ist so orientiert, daß im unverformten Ausgangszustand die x -Richtung seiner Längskoordinate, die y -Richtung seiner Breitenkoordinate und die z -Richtung seiner Höhenkoordinate entspricht. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Mittelpunkt einer Stirnfläche des Balkens. Der Balken mit der Länge l erstreckt sich von seiner Stirnfläche bei $x = 0$ bis zur Stirnfläche bei $x = l$. Der Balken ist in Bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ spiegelsymmetrisch. Als Querschnitte werden die Ebenen $x = \text{const}$ bezeichnet.

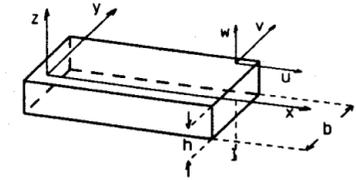


Abb. 2.1 Ortskoordinaten, Verschiebungen und Abmessungen am Balken

Wenn die Randfunktion der Querschnitte des Balkens nicht von x abhängt, wird er zylindrisch, sonst konturiert genannt. Er ist schlank, wenn der maximale Abstand der Oberflächen zur Balkenachse ($y = z = 0$) klein ist im Vergleich zur Länge des Balkens.

Bei einem zylindrischen Balken mit rechtwinkligem Querschnitt wird seine Höhe mit h , seine Breite mit b bezeichnet; er ist flach, wenn seine Höhe klein ist im Vergleich zu seiner Breite, und schmal, wenn seine Breite klein ist im Vergleich zu seiner Höhe. Im folgenden wird ein Balken mit $b = h = 0$ als Faser, mit $b = 0$ als Lamelle und mit $b = \infty$ als Platte bezeichnet.

Bei Verformung verschiebt sich der Punkt (x,y,z) um $u(x,y,z)$ in x -Richtung, um $v(x,y,z)$ in y -Richtung und um $w(x,y,z)$ in z -Richtung. Die Biegung erfolgt so, daß die Spiegelsymmetrie zur Ebene $y = 0$ erhalten bleibt, diese Ebene wird als Biegeebene bezeichnet. Nur der Spezialfall der Formänderung, bei der im wesentlichen Verschiebungen w , überlagert mit Verdrehungen um die y -Richtung, auftreten, wird im folgenden als Biegung betrachtet.

Zur Behandlung der Biegung in eindimensionalen Bildern, Theorien und Modellen werden Kenngrößen definiert, die die Biegung des Balkens allein in Abhängigkeit von seiner Längskoordinate beschreiben. Sie sind Maße für Verschiebungen und Kräfte, deren laterale Abhängigkeit von y und z durch eine punktbezogene Repräsentation oder durch mittelwertbildende Summen bzw. Integrale maskiert wird.

Als dynamische Kenngrößen werden die Querkraft K für die z -Komponente der Kraft und das Drehmoment M für die y -Komponente des Drehmomentes eingeführt. Als kinematische Kenngrößen werden die Durchbiegung und der

Drehwinkel eingeführt: Die Durchbiegung w ist ein Maß für die z-Komponente der Verschiebung, der Drehwinkel ψ ein Maß für die y-Komponente der Drehung der Querschnitte.

Die durch die Ortsableitung der Durchbiegung bestimmte Neigung ν , der durch den Verlauf des Drehmoments bestimmte Biegewinkel β und der durch die lokale Querkraft bestimmte Scherwinkel γ sind weitere Größen, mit denen die Biegung in einfachen Bildern beschrieben wird, s. Abb. 2.2.

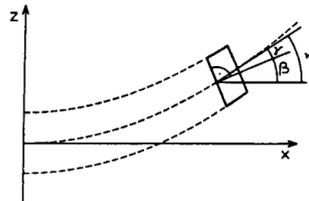


Abb. 2.2 Neigung ν , Biegewinkel β und Scherwinkel γ in einem einfachen Bild der Biegung

Ein Schnitt durch einen Balken an der Stelle x erzeugt zwei Oberflächen (Schnittufer). Im folgenden wird das Schnittufer, dessen Richtung der äußeren Flächennormalen in positiver x -Richtung zeigt, mit x^+ und das Schnittufer, dessen Richtung der äußeren Flächennormalen in negative x -Richtung zeigt, mit x^- bezeichnet.

Die in Abb. 2.3 definierten Vorzeichen für Kräfte und Momente beziehen sich auf das mit x^+ indizierte Schnittufer, sie beschreiben also die Übertragung der dynamischen Kenngrößen in positiver x -Richtung.

Im Rahmen dieser Konvention zeigt Abb. 2.3 beispielhaft ein Balkenstück, das durch die Schnittflächen x_0^+ und x_1^- begrenzt ist. Dagegen ist die Beschreibung der Kenngrößen an der Stelle x_1 auf das Schnittufer x_1^+ (im Sinne einer Kettenrechnung) bezogen.

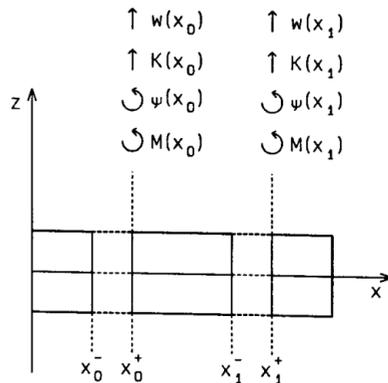


Abb. 2.3 Vorzeichenkonvention für die Kenngrößen am Beispiel zweier Querschnitte eines Balkens

Als Balkenparameter werden der Massenbelag und der Drehträgheitsbelag sowie die Biegesteifigkeit und die Schubsteifigkeit bezeichnet. Die Balkenparameter sind Funktionen der Werkstoffparameter Dichte, YOUNG'scher Modul und Schubmodul sowie der Formparameter Querschnittsfläche und y-Komponente des Querschnittsträgheitsmomentes.

Bei den Vorgaben (Randbedingungen) für die Kenngrößen auf einer Stirnfläche werden in der Literatur vier 'einfache Randbedingungen' unterschieden:

- (a) $K = 0$ und $M = 0$, frei
- (b) $w = 0$ und $\psi = 0$, fest (eingespannt)
- (c) $w = 0$ und $M = 0$, momentenfrei gelagert
- (d) $K = 0$ und $\psi = 0$, verschiebbar geführt

2.2.1.2 Einfache Balkenbiegung

Die einschränkenden Kriterien der Klasse der 'einfachen Balkenbiegung' sind in der folgenden Aufzählung zusammengestellt.

Es wird angenommen, daß

- (a) neben den Randbedingungen, die Biegung hervorrufen, kein anderer Lastfall überlagert vorliegt (im besonderen weder Torsion noch Längsdehnung);
- (b) Biegungen linear superponiert werden können, d.h., daß der Balken für jede Frequenzkomponente der zeitlich veränderlichen Randbedingungen betrachtet werden kann;
- (c) alle Verdrehungen sehr klein gegen eins sind;
- (d) der Balken stückweise aus homogenem Werkstoff besteht;
- (e) der Werkstoff elastisch isotrop ist;
- (f) die Beschreibung elastischer Wechselwirkungen im Rahmen eines linearen HOOKE'schen Gesetzes erfolgen kann;
- (g) die innere Dämpfung des Werkstoffes durch den Ansatz frequenzabhängiger komplexer Moduln berücksichtigt werden kann;
- (h) die Zustandsänderungen des Werkstoffes adiabatisch erfolgen.

2.2.2 BERNOULLI-Bild

Das erste Bild des Biegebalkens geht zurück auf Anschauungen von MARIOTTE und COULOMB. Es beruht auf der Vorstellung, daß die Biegeelastizität des Balkens von der Dehnung bzw. der Stauchung gedachter Längsfasern herrührt, die sich reibungsfrei aneinander vorbeibewegen können. In diesem später nach BERNOULLI benannten Bild kommen auf halber Balkenhöhe neutrale Fasern vor, die während der Biegung ihre Länge nicht ändern.

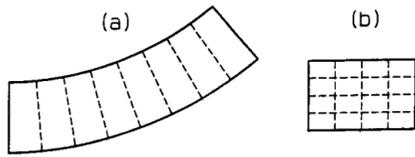


Abb. 2.4 BERNOULLI-Bild des gebogenen Balkens, (a) Längsschnitt, (b) Querschnitt

Aus der verzerrten Form des in Abb. 2.4 dargestellten BERNOULLI-Balkens kann man die zwei nach BERNOULLI benannten Annahmen entnehmen: (1) Querschnitte des Balkens bleiben eben, (2) Querschnitte bleiben senkrecht zu den neutralen Fasern. Dazu gehört wegen der Reibungsfreiheit der Längsfasern eine Kraftverteilung, die ein konstantes Drehmoment entlang des Balkens erzeugt.

Zur Zeit von MARIOTTE und COULOMB wurde das BERNOULLI-Bild als vollständig angesehen, weil der Beitrag der Schubelastizität zur Formelastizität noch nicht erkannt war.

2.2.3 Berücksichtigung der Schubelastizität und der Querkontraktion

Durch die Berücksichtigung der Schubelastizität und der Querkontraktion entsteht anstelle des BERNOULLI-Bildes ein anderes Bild der Balkenbiegung. Hinsichtlich der Querkontraktion muß zwischen der Platte und einem endlich breiten Balken unterschieden werden. Während sich die Querkontraktion bei der Platte aus Symmetriegründen nur in z-Richtung auswirken kann, tritt bei endlich breiten Balken auch eine Verformung der Querschnitte in y-Richtung auf.

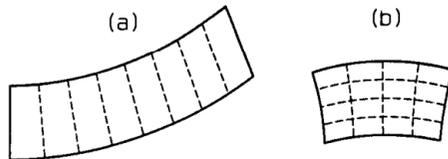


Abb. 2.5 Bild des gebogenen schubelastischen Balkens, (a) Längsschnitt, (b) Querschnitt

Im Gegensatz zum BERNOULLI-Bild, in dem die Neigung der Querschnitte mit dem Biegewinkel identisch ist, setzt sich die Neigung nun aus dem Biegewinkel und dem Scherwinkel zusammen, vgl. Abb. 2.2. Der Scheranteil der Verdrehung führt zur Änderung der Winkel zwischen den Querschnitten und der oberen bzw. unteren Mantelfläche. In der Konsequenz wird hier die zweite BERNOULLI'sche Annahme aufgegeben.

Abb. 2.5 zeigt neben dem Auftreten eines Scherwinkels auch die phänomenologisch wegen der Querkontraktion zu erwartende Verzerrung der Querschnitte. Die Querkontraktion bzw. -dilatation verdünnt den Balken in dem auf Zug beanspruchten Bereich bzw. verdickt ihn in dem gestauchten Bereich. Allerdings bleiben in diesem Bild die Querschnitte eben. Da sich die Form der Querschnitte unsymmetrisch zur Ebene $z=0$ verändert, bleibt bei der Biegung keine Faser während des Biegevorganges neutral in bezug auf eine Längsdehnung. Deshalb ist in diesem Bild die Voraussetzung der Existenz einer neutralen Faser aufgehoben.

2.2.4 Berücksichtigung der Verwölbung

Bei der Biegung verformen sich die Querschnitte nicht nur in der Weise, daß ihre Querschnitte eben bleiben: an den Querschnitten lassen sich Verwölbungen beobachten, s. Abb. 2.6.

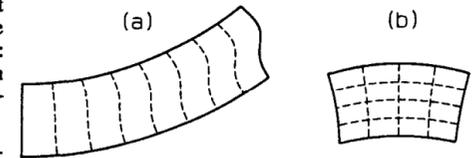


Abb. 2.6 Bild eines schubelastischen Balkens mit Verwölbung, (a) Längsschnitt, (b) Querschnitt

Da der Balken auf seiner Mantelfläche frei von äußeren Kräften ist, folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen der Kontinuumsmechanik, daß auch z.B. die y-orientierte Schubspannung an den z-orientierten Mantelflächen verschwindet. Weil dieser Zusammenhang an jeder Stelle der Berandung des Querschnittes gilt, bleibt der Winkel zwischen Querschnitt und Mantelfläche an jeder Stelle der Mantelfläche bei der Verformung erhalten. Dies erzwingt bei Biegung einerseits eine Verwölbung der Querschnitte und andererseits eine Ungleichverteilung der Schubspannung auf dem Querschnitt, soweit Querkräfte übertragen werden. Eben bleibende Querschnitte, wie sie in der ersten BERNOULLI'schen Annahme postuliert sind, stehen deshalb im Widerspruch zu einer Querkraftübertragung.

Insbesondere die Verwölbung der Stirnflächen hängt von der Form der Stirnfläche ab, da an diesen Endflächen äußere Randbedingungen zu erfüllen sind. Deshalb ist dieses Bild für allgemeine Querschnitte auch qualitativ nicht leicht zu entwerfen.

2.2.5 Berücksichtigung dynamischer Aspekte

Bei der Berücksichtigung dynamischer Aspekte ist in Bildern zu beachten, daß sich Störungen des elastischen Gleichgewichtes im Werkstoff höchstens mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten können. Ein erheblicher Einfluß kräftefreier Oberflächen ist deshalb auf eine Distanz begrenzt, die in der Größenordnung der reziproken Wellenzahl akustischer Longitudinalwellen liegt. Die in den Bildern der Querkontraktion zuzuschreibenden Effekte bleiben deshalb aus dynamischer Sicht auf Mantelzonen mit dieser Dicke beschränkt.

Während bei der Platte dieser Einfluß nur in Höhenrichtung in das Bild der Biegung aufzunehmen ist, muß bei Balken endlicher Breite auch in y -Richtung eine Zone mit Querkontraktion berücksichtigt werden.

Da die Relation zwischen den Balkenabmessungen und den Distanzen, innerhalb derer sich die Querkontraktion auswirken kann, von der Frequenz abhängt, ergibt sich ein Bild, in dem frequenzabhängig jeder Querschnitt des Balkens aus einer elastisch weniger nachgiebigen Kernzone und einer elastisch nachgiebigeren Randzone zusammengesetzt ist. Bei der späteren Modellbildung führt dieses Bild der Balkendynamik zur Einführung effektiver längselastischer Moduln für den Werkstoff.

2.3 Elastodynamische Theorien

Der Widerstand, mit dem sich ein Körper einer elastischen Deformation widersetzt, ist proportional zur Deformation selbst. Diese grundlegende Erkenntnis zur Elastizität, die HOOKE im Jahre 1660 formulierte, ist Ausgangspunkt aller Beschreibungen elastischer Verformungen. (Heute versteht man häufig unter HOOKE'schem Gesetz die Formulierung der Spannungs-Verzerrungsrelation im Sinne der Kontinuumstheorie.)

Aus historischer Sicht kann man vier Ansätze für physikalische Theorien unterscheiden, die bei der Beschreibung von elastischer Biegung eine wesentliche Rolle spielen. Jeweils zwei Theorien sind unter einem Oberbegriff zusammengefaßt. Als klassische Theorien werden die Masse-Feder-Theorie und die Theorie elastischer Linien bezeichnet, die historisch auf die Denkweise der Mechanik des Massepunktes zurückgehen. Zu Beginn des 18. Jahrhunderts legten CAUCHY, POISSON und NAVIER die mathematischen Grundlagen der Theorie der Elastizität. Gleichzeitig entstanden aus den damaligen unterschiedlichen Vorstellungen vom Aufbau der Materie die Kontinuumstheorie und die Korpuskulartheorie, die in ihren gegensätzlichen Axiomen die Elastizitätstheorie bis heute prägen.

Im folgenden werden die axiomatischen Prinzipien der vier Theorien gegenübergestellt. Ihre Denkweise unterscheidet sich einerseits in der Art, Trägheit und Elastizität zu erfassen. Andererseits beschreiben sie in unterschiedlicher Weise die Lage bzw. die Bewegung eines Körpers und die inneren elastischen Kräfte.

2.3.1 Klassische Theorien

2.3.1.1 Masse-Feder-Theorie

Der hier als Masse-Feder-Theorie bezeichneten Betrachtungsweise gelingt die Beschreibung elastischer Systeme durch Beibehaltung der Idee der konzentrierten Massen. Die elastische Wechselwirkung zwischen den Massepunkten wird durch allgemeine, masselose Federn berücksichtigt.

Die Materialeigenschaften des Körpers sind diskontinuierlich verteilt. Die Trägheit wird in den Massepunkten durch die Masse selbst (gegebenenfalls erweitert durch eine ihr zugeordnete Drehträgheit) charakterisiert; die Elastizität wird durch eine Kombination von Federn repräsentiert, die zwischen Massepunkten alle möglichen Spannungskomponenten übertragen können.

Der Bewegungszustand des Systems wird mathematisch durch zeitabhängige Ortsvektoren zu den Massepunkten beschrieben. Die relativen Abstandsänderungen zwischen den Punkten sind ein Maß für die mit der Bewegung verbundene elastische Verzerrung. Die Kraft- bzw. Momentenübertragung wird in den Federn lokalisiert.

2.3.1.2 Theorie elastischer Linien

Im Gegensatz zur Masse-Feder-Theorie behält die Theorie elastischer Linien nicht den nulldimensionalen Massepunkt bei, sondern idealisiert den Körper durch eine in Querrichtung ausdehnungslose Linie. Die Materialeigenschaften sind dabei eindimensional kontinuierlich verteilt: die Linie ist gleichmäßig mit Masse belegt und widersetzt sich elastisch der Verbiegung im HOOKE'schen Sinne.

Der Bewegungszustand wird mathematisch durch die zeitabhängige Gleichung einer Kurve gegeben. Kräfte und Momente greifen direkt an der Linie an und sind Ortsfunktionen der Bogenkoordinate.

Mit Hilfe der Theorie der elastischen Linien, die EULER in seinem Buch 'De Curvis Elasticis' erstmals formulierte /11/ gelang EULER und J. und D. BERNOULLI eine erste Lösung des GALILEI'schen Problems der Balkenbiegung. Die Entwicklung dieser Theorie, die häufig als die Grundlage der technischen Biegelehre angesehen wird, ging einher mit der Entdeckung des Extremalprinzips in der Physik und den differentiellen Methoden zur Aufstellung von Bewegungsgleichungen.

◦ Anmerkung

Die Theorie elastischer Linien wird im Zusammenhang mit Balkenbiegung häufig mit dem Schlagwort 'EULER-BERNOULLI-Balken' belegt. Allerdings unterstellt man damit in der Regel die BERNOULLI'schen Annahmen, die in Abschnitt 2.2.2 vorgestellt wurden. Hierzu ist anzumerken, daß EULER zwar vom Spezialfall der Balkenbiegung nach dem BERNOULLI-Bild ausging, aber nur den Ansatz nutzt, daß die Krümmung der Linie dem Biegemoment proportional ist. Eine Beschränkung auf kleine Auslenkungen ist seiner Theorie genauso fremd wie eine Biegesteifigkeit, die auf das Produkt eines Elastizitätsmoduls mit dem Flächenträgheitsmoment zurückgeführt wird. Daß dieser Sachverhalt in vielen Lehrbüchern und Veröffentlichungen zur Balkenbiegung verkannt wird, wird in späteren Teilen der vorliegenden Arbeit bei der Interpretation der Biegesteifigkeit eine Rolle spielen.

2.3.2 Theorien der Elastizität

2.3.2.1 Kontinuumstheorie

Die Theorie der elastischen Kontinua geht von axiomatischen Voraussetzungen aus: Es wird angenommen, daß alle Materialeigenschaften des elastischen Körpers stetig über sein Volumen verteilt sind, so daß diese Eigenschaften auch für das kleinste ausgeschnittene Volumenelement kontinuierlich erhalten bleiben. Die Materialeigenschaften Dichte und Elastizität sind stetige Funktionen des Ortes.

Jedem Punkt eines elastischen Körpers werden körperfeste Koordinaten zugeordnet, die im kräftefreien Zustand mit den raumfesten Koordinaten übereinstimmen. Der Unterschied zwischen raumfesten und körperfesten Koordinaten infolge einer allgemeinen Lageveränderung - das Verschiebungsfeld - kann in Translations-, Rotations- und Deformationsanteile zerlegt werden. Ein Maß für die lokale Rotation und für die elastische Verzerrung in der Umgebung eines Punktes erhält man durch Bildung des Gradienten des Verschiebungsfeldes. Der antisymmetrische Teil des so gebildeten Tensors zweiter Stufe beschreibt die lokale Verdrehung und der symmetrische Teil - der Dehnungstensor - beschreibt die Verzerrung. Der Dehnungstensor enthält sechs unabhängige Verzerrungskomponenten, drei Dehn- und drei Schubverzerrungen. Faßt man jede dieser Komponenten als eine Funktion des Ortes auf, so müssen die zugehörigen sechs Ortsfunktionen Kompatibilitätsbedingungen erfüllen.

Die elastischen Spannungen, die einem Punkt des Körpers zugeordnet werden, werden ebenfalls durch einen Tensor zweiter Stufe beschrieben. Er enthält für drei differentielle Flächenelemente, deren Flächennormalen ein Volumen aufspannen, jeweils drei Spannungskomponenten, für jedes Flächenelement eine Normal- und zwei Tangentialkomponenten. Bei Abwesenheit von eingepägten Momenten ist der Spannungstensor symmetrisch.

In dieser Theorie treten im HOOKE'schen Gesetz die Tensoren der Spannungen, der elastischen Moduln und der Verzerrungen an die Stelle der skalaren Größen. Der Tensor der elastischen Moduln ist ein Tensor vierter Stufe, von dessen 81 Komponenten bei äolotropen Festkörpern 21, bei isotropen Festkörpern zwei unabhängig sind.

2.3.2.2 Korpuskulartheorie

Die Betrachtungsweise der Korpuskulartheorie geht von der atomistischen Struktur fester Körper aus. Man versucht, die Materialeigenschaften auf die Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Atomen bzw. Molekülen zurückzuführen. Die Entwicklung dieser Theorie ist deshalb stets eng verknüpft mit dem jeweiligen Wissen über den Aufbau eines Festkörpers.

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts stellte man sich den Festkörper als ein System homogen verteilter Kraftzentren vor, die untereinander durch reine Zentralkräfte verbunden sind. Mit dieser Annahme gelingt es, das elastische Verhalten makroskopischer Körper zu beschreiben. Allerdings ergeben sich im Falle der Äolotropie lediglich 15, im Falle der Isotropie nur eine unabhängige elastische Konstante, im Gegensatz zu 21 bzw. zwei bei der Kontinuumstheorie. Erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts konnte VOIGT experimentell zeigen, daß eine Theorie der Elastizität mindestens 21 unabhängige Konstanten zulassen muß und daß demzufolge der Ansatz reiner Zentralkräfte zwischen den Atomen nicht zutrifft. Seit dieser Zeit ist die Kontinuumstheorie in den Ingenieurwissenschaften beherrschende Grundlage der Elastizitätstheorie, obwohl sie auf physikalisch nicht zutreffenden Axiomen beruht.

In der modernen Weiterentwicklung der Korpuskulartheorie wird versucht, unter Berücksichtigung aller quantenmechanischen Kopplungen zwischen den Bausteinen die elastischen Konstanten zu bestimmen und plastische Verformung und anelastische Phänomene zu beschreiben. Allerdings sind bisher keine mathematischen Wege gefunden worden, das elastische Verhalten makroskopischer Körper auf der Grundlage dieser Theorie zu beschreiben.

2.4 Modelle der Balkenbiegung

In der Betrachtungsweise der vorliegenden Arbeit entsteht ein Modell aus der Synthese eines Bildes und einer Theorie. Bei der Synthese ist es erforderlich, aus den im Bild zur Beschreibung des Vorganges auftretenden Parametern und aus den entsprechenden Parametern, die in der Theorie bereitgestellt werden, Modellparameter zu definieren. Für ein Biegemodell sind die Balken- und Werkstoffparameter und die Parameter zur Beschreibung der Kinematik und Dynamik des Balkens - für eindimensionale Modelle die kinematischen und dynamischen Kenngrößen- mit ihren Randbedingungen festzulegen.

Bei der Bildung eines Biegemodells ist eine Kombination der verschiedenen Bilder und der verschiedenen Theorien möglich. Dabei werden jeweils modellspezifisch Vereinfachungen und Vernachlässigungen erforderlich, die die Gültigkeit des jeweiligen Modells einschränken. Auf der Basis der gleichen Bild-Theorie-Kombination können durch verschiedene Interpretationen der Parameter unterschiedliche Modellvarianten entstehen.

Für die Modellbildung stehen nach Abschnitt 2.3 die Theorie der elastischen Linie, die Feder-Masse-Theorie und die Kontinuumstheorie zur Verfügung. Im folgenden wird für jede Theorie die Modellbildung mit den verschiedenen Bildern diskutiert.

Unter Abschnitt 2.4.1 wird die Theorie der elastischen Linie zur Modellbildung verwendet. In Verbindung mit den Bildern ergeben sich die in der Literatur häufig mit den Attributen "klassisch" oder "technisch" belegten Biegemodelle. Da ein Modell aus dieser Gruppe später für die Beschreibung von Ultraschall-BiegeWellenleitern genutzt wird, wird die Modellbildung mit ihren Voraussetzungen und impliziten Annahmen ausführlich dargelegt.

Unter Abschnitt 2.4.2 wird die Feder-Masse-Theorie der Modellbildung zugrunde gelegt. Im Gegensatz zu den Modellen mit der Theorie der elastischen Linie, die wegen der eindimensionalen Theorie nur eindimensionale Modelle liefern kann, sind nun mehrdimensionale Modelle möglich.

Unter Abschnitt 2.4.3 wird die Modellbildung mit Hilfe der Kontinuumstheorie beschrieben.

2.4.1 Modelle mit der Theorie der elastischen Linie

In den folgenden Abschnitten werden den Modellen Namen zugewiesen, die teilweise abweichend von der üblichen Bezeichnungsweise gewählt sind. Um Mißdeutungen vorzubeugen, wird vorab die Bezeichnung der Modelle mit Hinweis auf ihre jeweilige Berücksichtigung der Biegesteifigkeit, der Drehträgheit und der Schubelastizität in Tab. 2.1 im Überblick zusammengestellt.

Modellname	Biegesteifigkeit	Drehträgheit	Schubelastizität
EULER-Modell	B_E	-	-
BERNOULLI-Modell	$E_y I$	(ρI)	-
BERNOULLI'sche Modelle	EI	(ρI)	-
schubelastische BERNOULLI-Modell	$E_y I$	ρI	$G_y F$
schubelastische BERNOULLI'sche-Modelle	EI	(ρI)	GF
TIMOSHENKO-Modell	$E_y I$	ρI	$T_K G_y F$
TIMOSHENKO'sche Modelle	EI	(ρI)	$T_K GF$

Tab. 2.1 Bezeichnungsweise der Balkenmodelle mit der Theorie der elastischen Linie und ihre Berücksichtigung der Biegesteifigkeit, der Drehträgheit und der Schubelastizität.

- B_E 'absolute Elastizität' nach EULER
- E Elastizitätsmodul
- G Schubmodul
- ρ Dichte
- I Flächenträgheitsmoment des Querschnitts
- F Fläche des Querschnitts
- T_K TIMOSHENKO-Koeffizient
- Y kennzeichnet als Index die Moduln als Materialkonstanten

Nach Einführung in die elementare Modellbildung mit dem BERNOULLI-Bild in Abschnitt 2.4.1.1 werden in den folgenden Abschnitten die Auswirkungen der weitergehenden Bilder auf die Modellparameter diskutiert.

2.4.1.1 Elementare Modellbildung

Im BERNOULLI-Bild gibt es mindestens eine Faser, die bei der Biegung ihre Länge nicht ändert. Charakterisiert man die Biegung des Balkens durch die Biegung dieser neutralen Faser, so läßt sich der Balken mit Hilfe der Theorie der elastischen Linie beschreiben, indem man methodisch die Linie mit dieser Faser identifiziert. Dies ist der Grundgedanke der Modellbildung.

Im Bild läßt sich die Geometrie des gebogenen Balkens durch die Angabe der Durchbiegung und des Biegewinkels beschreiben. In der Theorie kann beispielsweise die elastische Linie durch ihre Parameterdarstellung mit der Bogenlänge als Parameter beschrieben werden. Beschränkt man in der Theorie die Biegung auf kleine Auslenkungen aus dem ungebogenen Zustand, kann man die Linie näherungsweise durch ihren Abstand von der x-Achse und durch ihre Neigung, jeweils in Abhängigkeit von der Längskoordinate, beschreiben. Der Abstand der Linie von der x-Achse wird dann mit der kinematischen Kenngröße Durchbiegung identifiziert. Der Biegewinkel des Balkens entspricht im Bild und die Neigung der Linie entspricht in der Theorie der kinematischen Kenngröße Drehwinkel.

Im BERNOULLI-Bild können Drehmomente und Querkräfte, die an demselben Querschnitt angreifen, zu einem Gesamtmoment und zu einer Gesamtkraft superponiert werden. In der Theorie greift das Drehmoment und die Querkraft direkt an der Linie an. Wegen der Beschränkung auf kleine Auslenkungen kann die z-Komponente der Querkraft näherungsweise als Maß für die Querkraft dienen. Mit diesen Bedeutungen werden die Modellparameter Querkraft und Drehmoment als dynamische Kenngrößen gebildet.

Die Definition der Balkenparameter im Modell ist für die zur Durchbiegungsbewegung gehörende Trägheit unproblematisch: sie entspricht in der Theorie dem Massebelag der Linie und im Bild dem Produkt aus Dichte und Querschnittsfläche.

Die Biegesteifigkeit kann man im einfachsten Fall zunächst sowohl im Bild als auch in der Theorie als einen HOOKE'schen Modul des elastischen Widerstandes gegen Verbiegung interpretieren. EULER bezeichnet in seiner Abhandlung über die Balkenbiegung /11/ diesen Modul als 'absolute Elastizität' B_E des Balkens. Zur Definition dieses Modellparameters für die Biegesteifigkeit gibt er eine Meßvorschrift an, die die Messung des elastischen Widerstandes im Biegeversuch am betrachteten Balken selbst vorschreibt.

Die Drehträgheit der Balkenquerschnitte, die aus dem Bild notwendig folgt, läßt sich ohne weiteres nicht aufnehmen, da die elastische Linie in EULER's Theorie nicht drehrträge ist. Die Drehträgheit muß also bei der elementaren Modellbildung vernachlässigt werden. Diese Vernachlässigung ist für den Fall großer reziproker Wellenzahlen im Vergleich zur Balkenhöhe gerechtfertigt, da bei solchen Biegungen der Beitrag der Durchbiegungsbewegung zur kinetischen Energie der Welle den entsprechenden Beitrag der Drehbewegung überwiegen wird.

Die für das Modell zu findende Formulierung für äußere Kräfte, Momente und Auflagerbedingungen ist direkt mit den Definitionen der kinematischen und dynamischen Kenngrößen verknüpft. Für ihre Randbedingungen gilt jeweils die gleiche Argumentation wie für die entsprechenden Kenngrößen.

Für dieses elementare Modell der Theorie der elastischen Linie mit Bezug auf das BERNOULLI-Bild, das im folgenden wegen der auf EULER zurückgehenden Definition der Biegesteifigkeit EULER-Modell genannt wird, lauten die vier Beziehungen zwischen den vier Kenngrößen

$$K' = -\rho F \dot{w} \quad (2.1a) \quad w' = \psi \quad (2.1b)$$

$$M' = -K \quad (2.1c) \quad \psi' = -\frac{1}{B_E} M \quad (2.1d)$$

Gl. 2.1a formuliert das NEWTON'sche Gesetz für die mit der Durchbiegung verbundene Bewegung. Gl. 2.1b erfaßt die Identität zwischen der Neigung dw/dx und dem Drehwinkel. Gl. 2.1c berücksichtigt den Einfluß der Querkraft auf das Drehmomentgleichgewicht. Gl. 2.1d ist das HOOKE'sche Gesetz für die Verdrehung der Balkenquerschnitte.

2.4.1.2 Biegesteifigkeit

Die bei der elementaren Modellbildung gewählte Definition der Biegesteifigkeit über eine Meßvorschrift schöpft die Aussagen des BERNOULLI-Bildes nicht aus. Im BERNOULLI-Bild ist die Längselastizität der gelängten bzw. verkürzten Fasern die Ursache der Biegeelastizität. Deshalb läßt sich die Biegesteifigkeit auf das Produkt des Elastizitätsmoduls E der Längsdehnung und den Formparameter I zurückführen, $B = EI$. (Auch EULER stellt in /11/ weitergehende Betrachtungen zur Biegeelastizität eines Balkens an. Er vermutete, daß die Steifigkeit linear mit der Breite und quadratisch mit der Höhe anwächst. Er nutzte diese falsche Vermutung allerdings nicht zur Modellbildung, sondern wählte stattdessen die Meßvorschrift.)

Bei dieser Übertragung der Biegesteifigkeit ist zunächst der Modul E zu definieren. In den älteren Veröffentlichungen (s. z.B. RAYLEIGHs Diskussion der Balkenbiegung /12/) ist E explizit festgelegt als Proportionalitätskonstante zwischen Spannung und Dehnung in einem statischen Zugversuch an einem Stab, der an seinen Stirnflächen gleichmäßig belastet ist und dessen Mantelflächen sich frei bewegen können. Dieser Lastfall entspricht der heutigen Definition des YOUNG'schen Moduls E_Y , also einer Materialkonstanten. Der Ansatz EYI wird durch das BERNOULLI-Bild nahegelegt, daher wird das Modell mit dieser Biegesteifigkeit hier als das BERNOULLI-Modell bezeichnet.

Berücksichtigt man die in Abschnitt 2.2.5 dargelegten dynamischen Aspekte, kann man auch anders - z.B. dynamisch - bestimmte E -Module einführen. Es ergeben sich so verschiedene Modelle des BERNOULLI-Bildes in Abhängigkeit von der Vorschrift zur Bestimmung des E -Moduls. Diese Modelle mit einem anderen E -Modul als E_Y werden im folgenden als BERNOULLI'sche Modelle bezeichnet.

• Anmerkung

Der Elastizitätsmodul E kann z.B. über die Ausbreitung von longitudinalen Dehnschwingungen auf Stäben ermittelt werden. Dabei wird man in Abhängigkeit von den Querabmessungen und der Wellenzahl einen dynamischen Modul messen, der infolge der Dispersion der Dehnenwellen im %-Bereich vom YOUNG'schen Modul E_Y abweichen kann.

Leider wird in der Literatur zur Biegung nur selten eine Definition oder eine Meßvorschrift für den benutzten E -Modul gegeben. Konsequente Vergleiche zwischen den vorgestellten Modellen anhand von Meßwerten sind deshalb nur selten möglich.

Es ist wichtig, daß das EULER-Modell nicht von derartigen indirekten Meßverfahren abhängt. Da in diesem Modell in bezug auf die Biegesteifigkeit die BERNOULLI'schen Annahmen nicht benötigt werden, ist deren Gültigkeit auch nicht Voraussetzung für dieses Modell. Bei korrekter Anwendung dieses einfachen Modells ist bei der meßtechnischen Bestimmung des elastischen Widerstandes im Biegeversuch auch der Einfluß der Schubelastizität in erster Näherung enthalten.

Neben dem E -Modul bedarf auch das Flächenträgheitsmoment der näheren Betrachtung. Der Ansatz eines EI für die Biegesteifigkeit gilt für den Formparameter I streng nur im BERNOULLI-Bild. In weitergehenden Bildern wird er zu einer Näherung, weil sich dort die Form der Fläche während der Biegung ändert und damit die Bestimmung von I auslenkungsabhängig über die verzerrte bzw. verwölbte Fläche zu erfolgen hätte. Eine bessere Berücksichtigung dieses Effektes ist in diesen Modellen nicht möglich, weil zum einen die Theorie keine Aussagen dazu machen kann und zum anderen dazu eine quantitative Aussage aus den Bildern abzuleiten wäre.

2.4.1.3 Drehträgeit

Während die verschiedenen Ableitungen der Biegesteifigkeit jeweils systemimmanente Interpretationen der Theorie der elastischen Linie sind, erfordert die Berücksichtigung der Drehträgeit eine Erweiterung dieser Theorie. RAYLEIGH ergänzt in /12/ EULERs Theorie um die Eigenschaft der lokalen Drehträgeit der elastischen Linie. Diese Eigenschaft verbindet er im Modell, ausgehend vom BERNOULLI-Bild, mit dem Produkt aus Dichte des Balkens und Flächenträgheitsmoment seines Querschnitts.

Benutzt man querschnittsverzerrende Bilder, wird dieser Ansatz wegen der Zurückführung auf das formabhängige Flächenträgheitsmoment wieder zu einer Näherung. Dabei gilt die gleiche Argumentation wie in Abschnitt 2.4.1.1 bzgl. des Flächenträgheitsmoments im Ausdruck für die Biegesteifigkeit.

Die Drehträgeit wird in allen Modellen mit der elastischen Linie unabhängig von der Wahl des Bildes durch ρI - durch den sogenannten RAYLEIGH-Term - mit dem oben beschriebenen Verständnis etabliert. Der Term kann in jedes Modell eingeführt werden, ohne die Modellbildung für die anderen Parameter zu berühren. Deshalb ist dieser Term in Tab. 2.1 in Klammern aufgeführt und als Option anzusehen.

Da mit Einführung des RAYLEIGH-Termes die Rechnungen mit den Modellen mathematisch erheblich aufwendiger werden, wird in vielen Anwendungsfällen auf seine Berücksichtigung verzichtet. Es sei vorweggenommen, daß dies für ein Modell zur Beschreibung von Biegewellenleitern nicht zu rechtfertigen ist, weil der Term zur Charakterisierung des kinetischen Energiespeichers des Drehwellenanteils der Biegewellen prinzipiell erforderlich ist.

In den Gleichungen der Modelle wird das Drehmomentgleichgewicht in Gl. 2.1 c durch den Beitrag der Drehbeschleunigung in Gl. 2.2 c ergänzt.

$$K' = -\rho F \ddot{w} \quad (2.2 \text{ a}) \quad w' = \psi \quad (2.2 \text{ b})$$

$$M' = - (K + \rho I \ddot{\psi}) \quad (2.2 \text{ c}) \quad \psi' = -\frac{1}{B} M \quad (2.2 \text{ d})$$

2.4.1.4 Schubsteifigkeit

TIMOSHENKO stellte 1921 erstmals ein Modell mit Berücksichtigung der Schubelastizität vor. In seiner Originalarbeit /13/ beschreibt er allerdings gleichzeitig zwei, im Sinne der Systematik der vorliegenden Arbeit wesensverschiedene Schritte: zum einen die prinzipielle Einführung des schubelastischen Bildes und zum anderen eine Modifizierung der Schubelastizität aufgrund des Verwölbungsbildes. Es ist methodisch entscheidend, diese beiden Schritte hier zu trennen und dies auch in der Bezeichnungsweise der Modelle kenntlich zu machen.

In der Literatur sind in der Regel beide Aspekte mit dem Namen TIMOSHENKO verbunden. Bei der Modellbildung allein mit dem schubelastischen Bild ergeben sich Modelle, die in weiten Bereichen mit den bisher diskutierten Modellen übereinstimmen und deshalb mit dem Zusatz "schubelastisch" zur bisherigen Bezeichnung ausreichend charakterisiert sind, s. Tab.2.1. Die Bezeichnung der Modelle nach TIMOSHENKO bleibt den Modellen mit dem Verwölbungsbild vorbehalten. In diesem Abschnitt wird zunächst die Einbeziehung der Schubelastizität durch die Modellsynthese mit dem schubelastischen Bild dargestellt.

Im schubelastischen Bild bleiben die Querschnitte auch im gebogenen Zustand des Balkens eben, sie verzerren sich lediglich infolge der Querkontraktion. Vernachlässigt man diese Verzerrung, kann man die auf die Schubelastizität zurückzuführende reine Scherabgleichung der Querschnitte geometrisch durch den Scherwinkel beschreiben. Die Schubsteifigkeit als Modul zwischen dem Scherwinkel und der Querkraft läßt sich dann durch das Produkt des Schubmoduls G mit dem Formparameter Querschnittsfläche F ausdrücken. Man erhält unter Beachtung der Vorzeichenkonvention nach Abschnitt 2.2.1.1 das HOOKE'sche Gesetz der Scherung in der Form

$$K = -GF \gamma \quad (2.3)$$

In Gl. 2.3 ist der Schubmodul G ein noch nicht näher spezifizierter, effektiver Modul. In der Regel wird für diese Modelle die Materialkonstante G_Y eingesetzt, die in Anlehnung an die Bezeichnungsweise für den E-Modul für den zu E_Y entsprechend gehörenden Lastfall definiert ist.

Der Scherwinkel kann nicht als Maß für die Schubabgleichung des Balkens in eine neue Modellkenngröße überführt werden, weil ein entsprechender Parameter in der Theorie nicht zu etablieren ist. Der Scherwinkel läßt sich aber in die Modellbildung für den Drehwinkel aufnehmen. Der Neigungswinkel des Balkens setzt sich im Bild additiv aus dem Biegewinkel und dem Scherwinkel zusammen, s. Abb. 2.2.

$$v = \beta + \gamma \quad (2.4)$$

Die Neigung der elastischen Linie in der Theorie ist daher mit dieser Winkelsumme zu identifizieren, dabei bleibt die Zuordnung von Biegewinkel zu Drehwinkel erhalten. Mit Hilfe von Gl. 2.3 läßt sich in den Differentialgleichungen für das Modell (vgl. Gl. 2.2b und Gl. 2.5b) der Scherwinkel eliminieren. Es ergibt sich also wieder ein Modell mit vier Kenngrößen.

Mit der oben beschriebenen Berücksichtigung der Schubsteifigkeit ist die Modellbildung mit dem schubelastischen Bild nicht abgeschlossen: auch andere Parameter sind neu zu definieren. Das schubelastische Bild schließt aus, daß alle Punkte eines Querschnitts in gleicher Weise bewegt werden; eine neutrale Faser - i.e. ein und dieselbe Faser, die während der Biegebewegung ihre Länge nicht ändert - existiert nicht mehr. Deshalb wird es erforderlich, die Durchbiegung neu festzulegen. Als Durchbiegung definiert TIMOSHENKO in /13/ die transversale Verschiebung des Flächenschwerpunktes eines Balkenquerschnitts; die Verbindung dieser Schwerpunkte etabliert die Faser, die mit der elastischen Linie identifiziert wird.

Die Übersetzung von Drehmoment und Querkraft des schubelastischen Bildes unterliegt geometrischen Schwierigkeiten. Da diese Kenngrößen als Summen über die Querschnittsfläche gebildet werden, muß die Form der Querschnitte im gebogenen Zustand des Balkens bekannt sein. Diese Form ist aus dem Bild quantitativ nicht abzulesen. Unter der Voraussetzung kleiner Auslenkungen kann man die Verzerrungen der Fläche wie bei der Definition der Biegestei-

figkeit und des RAYLEIGH-Termes vernachlässigen. Mit dieser Vernachlässigung behält TIMOSHENKO die Summenbildung für Drehmoment und Querkraft über die Querschnittsfläche im unverformten Zustand bei.

Die Modellbildung TIMOSHENKO ist nicht zwingend. COWPER definiert in /14/ die Durchbiegung durch das auf die Fläche F bezogene Flächenintegral über F der ortsabhängigen Verschiebung $w(y,z)$. Als Drehwinkel bezeichnet er das auf das Flächenträgheitsmoment I bezogene Flächenintegral über F der mit der Koordinate z gewichteten axialen Verschiebung $u(y,z)$. Für die dynamischen Kenngrößen definiert COWPER Integrale der entsprechenden Spannungen über die Fläche.

• *Anmerkung*

In den jüngsten Veröffentlichungen wird COWPER's Betrachtungsweise bevorzugt, weil sich mit diesen Ausdrücken einerseits auch Verwölbungsgeometrie erfassen lassen und andererseits eine Verbindungen zu Ausdrücken, die mit der Begriffsbildung der Kontinuumsmechanik abgeleitet werden, leichter herstellen lassen. Bei der Anwendung von Modellen mit diesen Definitionen der Kenngrößen ist allerdings zu beachten, daß die in COWPER's Definitionen enthaltenen Meßvorschriften verifiziert werden müssen.

Es sind noch andere Zuordnungen zwischen den Bildparametern und den Parametern der eindimensionalen Theorie der elastischen Linie denkbar. Dabei entstehen stets neue Modellvarianten. Hierfür läßt sich die Kontinuumsmechanik nutzen, die es gestattet, die eindimensionalen Kenngrößen durch geeignete Mittelwertbildungen auf das dreidimensionale Verschiebungsfeld bzw. auf den Spannungstensor zurückzuführen.

Das Schubelastische Bild führt bei der Definition der Randbedingungen zu Schwierigkeiten. Im BERNOULLI-Bild lassen sich Durchbiegung und Drehwinkel gedanklich stetig fortsetzen, auch wenn z.B. Balken mit verschiedenen Schubmodulen aneinander gefügt werden oder ein Querschnittsprung beschrieben werden soll. Eine stetige Fortsetzung ist im Schubelastischen Bild nicht möglich, weil bei verschiedenen Balken gleiche Werte der Kenngrößen dennoch zu verschiedenen Biegegeometrien im Hinblick auf den Scherwinkel führen können. Beispielsweise die einfache Randbedingung 'fest' verlangt, daß der Drehwinkel und die Durchbiegung verschwinden müssen: der Scherwinkel ist beliebig. Es sind eigentlich fünf unabhängige Randbedingungen erforderlich, um den Biegezustand des Balkens an einer Stelle eindeutig festzulegen. Im Rahmen dieser Modellbildung mit der Theorie der elastischen Linie ist nur die Fortschreibung der Definition der Randbedingungen für die vier Kenngrößen aus den BERNOULLI'schen Modellen möglich. Diese Festlegung enthält deshalb implizit eine Vernachlässigung der Schubelastizität für die Randbedingungen.

Dies gilt auch für COWPER's Definitionen der Kenngrößen, weil bei dieser Festlegung nicht die lokalen Verschiebungen, Kräfte und Momente betroffen sind, sondern lediglich Integrale dieser Größen.

An dieser Stelle ist ein Hinweis auf das Verständnis der Biegesteifigkeit erforderlich. Sowohl im EULER- wie in den BERNOULLI'schen Modellen ist die dort definierte Biegesteifigkeit beeinflusst durch den zu ihrer Bestimmung herangezogenen Lastfall. In beiden Modellvarianten wird die Bestimmung des elastischen Widerstandes des Balkens gegen Verbiegung durch Messung vorgeschrieben. In diesem elastischen Widerstand ist bei $B = EI$ in Abhängigkeit von der Meßvorschrift zur Bestimmung von E gegebenenfalls, in der Bestimmung von B_E immer die Wirkung der Schubelastizität in erster Näherung enthalten. Es ist deshalb falsch, ein EULER- oder ein BERNOULLI'sches Modell durch eine Schubsteifigkeit zu erweitern, ohne die Werte der Biegesteifigkeit entsprechend neu zu bestimmen. Nur das BERNOULLI-Modell läßt sich durch Hinzufügen des Schubterms $G\gamma F$ stringent erweitern.

Mit Gl. 2.3 und Gl. 2.4 wird ein Schubelastisches Element durch die Gln. 2.5 beschrieben. Für die Biegesteifigkeit B ist für das Schubelastische BERNOULLI-Modell $E\gamma I$, für die Schubelastischen BERNOULLI'schen Modelle EI einzusetzen.

$$K' = -\rho F \ddot{w} \quad (2.5a) \quad w' = \psi - \frac{K}{GF} \quad (2.5b)$$

$$M' = -(K + \rho I \ddot{\psi}) \quad (2.5c) \quad \psi' = -\frac{1}{B} M \quad (2.5d)$$

Es sei noch einmal betont, daß die gerade entworfenen Modelle nicht mit den sogenannten TIMOSHENKO-Modellen übereinstimmen. Die Modelle der Gln. 2.5 mit Berücksichtigung der Schubelastizität ohne Einflüsse aus dem Verwölbungsbild werden im folgenden als Schubelastisches BERNOULLI-Modell bzw. als Schubelastische BERNOULLI'sche Modelle bezeichnet.

• *Anmerkung*

Das Schubelastische BERNOULLI-Modell unter Berücksichtigung des RAYLEIGH-Terms ist das erste systematisch vollständige Modell für einen Biegewellenleiter, weil paarweise kanonische Energiespeicher auftreten, die die Biegewelle als gekoppelte Dreh- und Scherwelle ausweisen.

2.4.1.5 Verwölbungs-Korrektion

Die Modellbildung mit dem Verwölbungsbild baut auf der Modellbildung mit dem Schubelastischen Bild auf. Die Näherungen bei der Modellbildung der Kenngrößen, die schon bei der Berücksichtigung der Schubelastizität wegen der Aufgabe der zweiten BERNOULLI'schen Annahme notwendig wurde, müssen nun auf den Fall nicht mehr ebener Querschnitte ausgedehnt werden. Es lassen sich zwar theoretisch Funktionale in den Bildern über die verwölbten Querschnitte angeben, die aus der nun dreidimensionalen Geometrie bzw. aus dem Spannungszustand auf eine plausible Definition der Modellkenngrößen

Ben führen, aber das Verwölbungsbild reicht in seiner qualitativen Aussage nicht aus, tiefergehende Funktionen als einfache Mittelwerte wie bei Schubelastischen Modellen zu begründen. Deshalb wird bei der Modelldefinition der Kenngrößen die Verwölbung vernachlässigt. Um diese Vernachlässigung zu rechtfertigen, ist die Voraussetzung kleiner Auslenkungen schärfer zu sehen.

• *Anmerkung*

Die in Kap.3 diskutierten Messungen der Schnelleverteilung auf der Stirnfläche eines schwingenden Balkens zeigen auf, daß ein im Ansatz quantitatives reales Verwölbungsbild, das durch derartige Messungen erhalten wird, erheblich vom Einzelfall abhängig ist. In der Praxis werden in der Regel komplexere Definitionen der kinematischen Kenngrößen keinen Nutzen bringen.

In allen Festlegungen der Balkenparameter, die die Formparameter F und I enthalten, werden die Einflüsse der Verwölbung vernachlässigt. Die Formparameter werden stets als Konstanten bezogen auf den ungebogenen Zustand des Balkens betrachtet.

Einen weitergehenden Einfluß hat die Verwölbung auf die Schubelastizität des Balkens. Nach TIMOSHENKO läßt sich ein gebogener Balken mit verwölbten Querschnitten leichter weiter scheren als ein Balken mit ebenem Querschnitt. In der Denkweise der Theorie elastischer Linien läßt sich diese Vermutung nicht berücksichtigen. Deshalb geht TIMOSHENKO den Weg, die Schubsteifigkeit GF durch eine Korrektur mittels eines Koeffizienten T_K im HOOKE'schen Gesetz für die Scherung gemäß Gl. 2.6 zu modifizieren.

$$K = -T_K G_Y F_Y \quad (2.6)$$

Die Größe dieses Koeffizienten muß aus anderen Ansätzen hergeleitet und begründet werden. Benutzt man hierfür die Kontinuumstheorie, ist zu beachten, daß nur die Schubsteifigkeit im BERNOULLI-Modell modifiziert werden kann, da in dieser Theorie keine effektiven Moduln E oder G erlaubt sind, sondern nur E_Y und G_Y als Konstanten eines isotropen Materials zugrunde gelegt werden dürfen. Benutzt man hierfür pragmatische Meßvorschriften, lassen sich auch BERNOULLI'sche Modelle mit einem solchen Koeffizienten in der Schubsteifigkeit erweitern.

Der Einfluß der Verwölbung ließe sich allerdings auch ohne Einführung eines besonderen Koeffizienten im effektiven Schubmodul berücksichtigen. Dennoch wird auch in der vorliegenden Arbeit zur Kennzeichnung der Berücksichtigung des Verwölbungsbildes in effektiven Moduln ein Koeffizient eingesetzt. Das Modell, das stringent auf E_Y und G_Y abgestützt ist, wird im folgenden als TIMOSHENKO-Modell bezeichnet. Modelle, die pragmatisch andere Biege- und Schubsteifigkeiten einführen, werden hier TIMOSHENKO'sche Modelle genannt. Der TIMOSHENKO-Koeffizient wird im nächsten Abschnitt ausführlicher diskutiert.

Bei der Definition der Bedeutung der Randbedingungen gilt die gleiche Argumentation wie bei ihrer Festlegung bei der Einführung der Schubelastizität in Abschnitt 2.4.1.3. Die Verwölbung läßt sich wie die Schubelastizität bei der Modellbildung für die Randbedingungen nicht mehr berücksichtigen.

Zur Vollständigkeit werden die Gleichungen dieses Modells in den Gl. 2.7 zusammengestellt. Für das TIMOSHENKO-Modell ist für den E-Modul E_Y und für den Schubmodul G_Y einzusetzen.

$$K' = -\rho F \ddot{w} \quad (2.7a) \quad w' = \psi - \frac{K}{T_K GF} \quad (2.7b)$$

$$M' = -(K + \rho I \ddot{\psi}) \quad (2.7c) \quad \psi' = -\frac{1}{EI} M \quad (2.7d)$$

2.4.1.6 TIMOSHENKO-Koeffizient

Im TIMOSHENKO-Modell wird der dreidimensionale Effekt der Verwölbung über eine Korrektur der Schubsteifigkeit eingeführt. Die historische Leistung des TIMOSHENKO-Modells ist es, der Kontinuumstheorie dadurch einen Eingriff in die technisch erfolgreiche Familie der BERNOULLI-Modelle zu ermöglichen, die bis 1921 beinahe ohne Berührung nebeneinander standen. Vor diesem Hintergrund wird verständlich, daß sich die Diskussion des TIMOSHENKO-Modells nach seiner Veröffentlichung fast ausschließlich auf die Herleitung und Abstützung seines Korrektur-Koeffizienten auf den Erkenntnissen aus der Kontinuumstheorie konzentriert. Die Definition der Kenngrößen wird in Anbetracht dieser Einwirkungsmöglichkeit zunächst nicht hinterfragt. Erst COWPER hat 40 Jahre später eine Weiterentwicklung des Modells in dieser Richtung versucht

Es wurde schon in Abschnitt 2.4.1.3 ausgeführt, daß bei der Bestimmung des TIMOSHENKO-Koeffizienten nur das Modulpaar E_Y und G_Y - also das TIMOSHENKO-Modell - zugrunde gelegt werden darf.

Zur Herleitung einer Bestimmungsgleichung für den Koeffizienten sind zwei Wege möglich:

Der erste Weg, einen Ausdruck für die Korrektur zu gewinnen, führt über den Vergleich der aus dem TIMOSHENKO-Modell berechneten Phasengeschwindigkeit von Biegewellen mit dem Ergebnis des Modells der Kontinuumstheorie; dies ist in einigen Spezialfällen möglich. Ein Spezialfall ist der Grenzfall von Biegewellen auf unendlich langen Zylindern, für den POCHHAMMER /15/ und CHREE /16/ eine exakte Beschreibung mit Hilfe der Kontinuumstheorie gefunden haben. Ein weiterer Spezialfall liegt bei der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Biegewellen mit sehr kleinen reziproken Wellenzahlen im Vergleich zur Balkenhöhe und -breite vor. In diesem Grenzbereich sollte ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit mit der Geschwindigkeit von RAYLEIGH'schen Oberflächenwellen übereinstimmen.

Der zweite Weg der Berechnung folgt der Definition der Korrektur. T_K modifiziert die Beziehung zwischen Querkraft und Scherwinkel, in der GyF als allein form- und werkstoffabhängige Schubsteifigkeit festgelegt ist. T_K ergibt sich im TIMOSHENKO-Modell dann als das Verhältnis des Scherwinkels multipliziert mit GyF zur Querkraft. Ein derartiger Ausdruck läßt sich auch aus Modellen der Kontinuumstheorie berechnen. Der Vergleich zwischen beiden Ausdrücken führt auf einen Koeffizienten, der einerseits von der Modellbildung für Scherwinkel und Querkraft im TIMOSHENKO-Modell und andererseits von der Modellbildung der entsprechenden Kenngrößen mit der Kontinuumstheorie abhängt.

Zur Bestimmung dieses Verhältnisses ist in der Kontinuumstheorie erforderlich, den Verschiebungsvektor und die Normal- und Schubspannungsverteilung im Querschnitt des Biegebalkens zu berechnen. Dies ist nur in Modellen für wenige Spezialfälle vollständig und für einige Fälle mit zuverlässigen Näherungen möglich. Zu diesen Ausnahmen gehören z.B. die Schwingungen einer Lamelle, die statische Biegung eines Balkens durch ein Moment bei Abwesenheit einer äußeren Querkraft und die statische Biegung eines Balkens durch eine Querkraft bei Abwesenheit eines äußeren Moments. Die statischen Lastfälle werden im Rahmen der Modellbildung mit der Kontinuumstheorie eingehender behandelt. Es zeigt sich, daß sich Koeffizienten nur für einfachste Querschnittsformen herleiten lassen. Dazu gehören rechteckige, kreisförmige und elliptische Balkenquerschnitte.

In Tab. 2.2 sind die veröffentlichten Werte für T_K ohne Anspruch auf Vollständigkeit in Anlehnung an einen Übersichtsartikel von KANEKO /17/ für den rechteckigen und für den kreisförmigen Querschnitt chronologisch aufgeführt. Die Tabelle beleuchtet die Schwankungsbreite wohl begründeter Ansätze, Näherungen und Meßwerte für T_K , die einer Diskussion in der Literatur standhalten konnten. Eine Analyse der Begründung jedes einzelnen Eintrags für T_K in Tab. 2.2 liefert keine neuen Erkenntnisse im Rahmen dieser Diskussion; für einige Koeffizienten ist die Ableitung in /17/ angedeutet.

In den Veröffentlichungen wird in der Regel die Modelldefinition für den Scherwinkel und die Querkraft nicht erläutert. Es ist davon auszugehen, daß sich die Koeffizienten auf die Modellbildung nach TIMOSHENKO beziehen. Nur die Werte von COWPER /14/, /37/ und die davon beeinflussten Ergebnisse von STEPHEN /45/, die auf COWPERs Modellbildung bezogen sind, dürfen wegen der abweichenden Definition der Kenngrößen nur bedingt in den Vergleich einbezogen werden.

Auch die experimentelle Bestimmung des T_K ist offensichtlich nicht hilfreich bei einer zuverlässigen Bestimmung der Korrektur. Den Experimentatoren gelingt die Verifikation sehr unterschiedlicher T_K jeweils für beide Querschnitte. KANEKO kommt in /17/ zu dem Schluß, daß wohl die TIMOSHENKO /18/ angegebenen Beziehungen sachgerecht sind. (In /18/ revidiert TIMOSHENKO seine Angaben in seiner ein Jahr vorher erschienenen ersten Ver-

Verfasser	Zitat	Jahr	Art	rechteckiger Querschnitt	Art	kreisförmiger Querschnitt
TIMOSHENKO	/13/	1921	T	2/3	T	$(6 + 12\sigma^2)/(7 + 12\sigma + 4\sigma^2)$
TIMOSHENKO	/18/	1922	T	$(5 + 5\sigma)/(6 + 5\sigma)$	T	9/10
GOENS	/19/	1931	T	5/6	T	0,9 für EG = 2,6
OLSON	/20/	1935	T	$(20 + 20\sigma)/(24 + 15\sigma)$	T	9/10
DAVES	/21/	1935	T	0,833 für EG = 2,6	T	24,612(1 + \sigma)/(29,58 + 5,942\sigma + 64,077\sigma^2)
ROARK	/22/	1938	T	5/6	T	24,612(1 + \sigma)/(29,58 + 5,942\sigma + 64,077\sigma^2)
ROARK	/23/	1945	T	$\pi^2/12$	V	24,612(1 + \sigma)/(29,58 + 5,942\sigma + 64,077\sigma^2)
PICKET	/24/	1951	T	$\pi^2/12$	T	0,847
MINDLIN	/25/	1951	T	$\pi^2/12$	T	
GOODMAN, SUTHERLAND	/26/	1952	V	$(6 + 5\sigma)/(6 + 5\sigma)$	T	
MINDLIN	/27/	1954	T	0,943	V	24,612(1 + \sigma)/(29,58 + 5,942\sigma + 64,077\sigma^2)
MINDLIN, DRESIEWICZ	/28/	1957	T	0,943	V	0,943 bzw. 0,982
HIGUCHI et al.	/29/	1958	E	0,87	T	
HEARMON	/30/	1960	E	5/6	T	
SPINNER et al.	/31/	1960	T	$(10 + 10\sigma)/(12 + 11\sigma)$	T	
TEFANEK, RUDNIK	/32/	1961	T	0,874 für $\alpha = 0,366$	T	
KEMANEK, RUDNIK	/33/	1966	T	0,832 für $\alpha = 0,139$	T	
KEHLENEN, SCHWARZLE	/34/	1966	T	$(6 + 12\sigma + 6\sigma^2)/(7 + 12\sigma + 4\sigma^2)$	T	
SCHAEFER	/35/	1966	T	5/6	T	
COWPER	/36/	1968	T	$(5 + 5\sigma)/(6 + 5\sigma)$	T	
HART, PARKINS	/37/	1968	T	1,04	T	
HART	/38/	1970	T		T	
COWPER	/39/	1972	T	$(10 + 10\sigma)/(12 + 11\sigma)$	T	
SPENCE, SELDIN	/40/	1973	E	0,874 für $\alpha = 0,366$	E	
TANJI	/41/	1975	V	0,832 für $\alpha = 0,139$	V	
RTCHIE	/42/	1976	V	$(6 + 12\sigma + 6\sigma^2)/(7 + 12\sigma + 4\sigma^2)$	V	
KANEKO	/43/	1978	TV	$(5 + 5\sigma)/(6 + 5\sigma)$	TV	
HSU	/44/	1979	TV		TV	
DOWNS	/45/	1980	T		T	
STEPHEN	/46/	1985	T		T	
STEPHEN, LEVNSON			T	$(10 + 10\sigma)/(12 + 11\sigma)$	T	
STEPHEN			T	$5(1 + \sigma^2)/(6 + 11\sigma + 4\sigma^2)$	T	
KRISHNAN, SRINIVASULLU			T	$X = 5 \cdot Y^2 + 80Y^3 \text{ tanh}^2 (\pi Y^2/7)$ Y = Balkenbreite/Balkenhöhe	T	
			T	8/15	T	

Tab. 2.2 Übersicht über die in der Literatur aufgefundenen theoretisch (T), experimentell (E), oder experimentell verifizierend (V) bestimmten TIMOSHENKO-Koeffizienten für Biegebalken mit rechteckiger bzw. kreisförmiger Querschnittsfläche.

fentlichung zu diesem Thema, vgl. Tab. 2.2). In Kap.3 wird versucht, den auf den ersten Blick unverständlich großen Wertebereich für die TIMOSHENKO-Koeffizienten anhand der eigenen Meßwerte zu erläutern.

Einige Autoren sehen keine Möglichkeit, mit einem einzigen Korrekturkoeffizienten ein TIMOSHENKO-Modell auf den untersuchten Einzelfall anwenden zu können. Es wird vorwiegend ein weiterer Koeffizient zur Korrektur der Biegesteifigkeit EyI begründet. AALAMI und ATZORI /47/ führen sogar bis zu vier Korrekturfaktoren in ihr TIMOSHENKO'sches Modell ein, um die Meßergebnisse an verschiedenen Profilen in einem solchen Modell beschreiben zu können.

Auch wird eine Frequenzabhängigkeit des T_K mit den Argumenten aus den skizzierten dynamischen Bildern in Erwägung gezogen - zuletzt von STEPHEN /43/ -, um für Biegewellen mit kleinen reziproken Wellenzahlen im Vergleich zur Balkenhöhe den oben erwähnten Grenzübergang zu RAYLEIGH-Wellen im Ausdruck für die Phasengeschwindigkeit zu erreichen.

Es kann aber nicht übersehen werden, daß man schon mit den Überlegungen TIMOSHENKO's aus dem Verwölbungsbild an der Grenze dieser Modellinie angekommen ist. Für die Einbeziehung der dynamischen Aspekte kommen nur pragmatische Korrekturen infrage. Durch eine große Zahl von Koeffizienten ist es letztlich immer möglich, mit den Modellen die Experimente zu beschreiben. Dies kann im Sinne einer phänomenologischen Beschreibung im Einzelfall sachgerecht sein. Aus diesen Koeffizienten kann aber keine verallgemeinerbare Aussage über ihre physikalische Ursache begründet werden. Auch der TIMOSHENKO-Koeffizient eignet sich nicht dazu, das Verwölbungsbild mit der Interpretation TIMOSHENKO's zu bestätigen oder zu quantifizieren.

2.4.2 Modelle mit der Feder-Masse-Theorie

Während der Grundgedanke der Modellbildung mit der EULER'schen Theorie die Identifizierung des Balkens mit einer eindimensionalen, massebelegten und elastischen Linie ist, liegt der Grundgedanke bei Anwendung der Feder-Masse-Theorie darin, den Balken durch eine Anzahl von konzentrierten Massepunkten und masselosen Federelementen zu repräsentieren. Die Modellparameter können daher nur diskontinuierlich definiert werden.

Im einfachsten Fall ist ein Balken durch zwei Massepunkte, die über eine Biegefeder verbunden sind, nachzubilden. Die Biegung des Balkens kann bei dieser einfachsten Modellbildung nur durch die kinematischen und dynamischen Kenngrößen der beiden Punkte definiert werden. Entsprechendes gilt für die Randbedingungen.

Die Masse des Balkens ist bei der Modellbildung auf beide Massepunkte zu verteilen. Die Federkonstante der Biegefeder läßt sich mit dem BERNOULLI-BILD durch eine Meßvorschrift bestimmen oder mit der gleichen Argumentation wie in den Abschnitten 2.1.1 und 2.1.2 auf ein EI zurückführen. Für eine Modellbildung mit dem schubelastischen Bild kann man die reine Biegefeder durch eine allgemeine Feder ersetzen, die auch die Schubsteifigkeit und im Hinblick auf das Verwölbungsbild auch Korrekturen der Steifigkeit berücksichtigt. Auch die Drehträgeit läßt sich in den kinematischen und dynamischen Gesetzen formulieren.

Eine Verbesserung des Modells erhält man durch eine Segmentierung des Balkens in eine größere Anzahl von Massepunkten und Federn. Dabei bleibt für ein Balkensegment die oben beschriebene Modellbildung grundsätzlich erhalten. Die Verbindung der die Balkenstücke repräsentierenden konzentrierten Masse-Feder-Elemente erfolgt durch die inneren Gleichgewichts- bzw. Stetigkeitsbedingungen für die kinematischen und dynamischen Kenngrößen. Die äußeren Randbedingungen sind die Werte der Kenngrößen an den Randelementen.

Die Modellbildung führt bei einer eindimensionalen Segmentierung des Balkens in Richtung der Balkenachse zu einer linearen Biege-Kette (HOLZER-Modell) oder bei einer zusätzlichen Segmentierung in y -Richtung zu einem zweidimensionalen Netz aus Massepunkten und Federn (MYKLESTAD-Modell). In der Regel wird die Biegesteifigkeit in diesen Modellen auf das BERNOULLI-Bild abgestützt, s. z.B. /48/, /49/. Die Modelle werden häufig bei der Berechnung von Tragwerken zugrunde gelegt, bei denen sich eine Modellbildung mit konzentrierten Elementen anbietet.

Im Grenzübergang zu einer Segmentierung eines Balkens durch eine unendlich große Anzahl von Masse-Feder-Elementen sind die Feder-Masse-Modelle äquivalent mit den Balkenmodellen mit der elastischen Linie, wenn die Balkenparameter nach den gleichen Bildern definiert werden. Methodisch hat die Modellbildung mit der Feder-Masse-Theorie zu den Ersatzschaltbildern der akustischen Netzwerktheorie geführt, s. z.B. /6/, /50/, /51/.

Im Sinne der Systematik kann man die in der technischen Mechanik sogenannte Methode der finiten Elemente als eine mathematische Weiterentwicklung der oben skizzierten Denkweise ansehen. Allerdings setzt die Anwendung der Methode der finiten Elemente die hier diskutierte Modellbildung bereits voraus. Dennoch werden die Modelle auf dieses mathematische Verfahren und auf die jeweilige Anwendung abgestimmt. Die klassischen Kenngrößen können methodisch durch allgemeiner definierte Verrückungen zur Kennzeichnung der lokalen Bieegeometrie und allgemeiner definierten Schnittkräften zur Beschreibung der elastischen Wechselwirkung ersetzt werden. (In /52/, Seite 222 ff, wird die Modellbildung für kontinuierliche Schwingsysteme allgemein beschrieben; in /53/ wird beispielsweise ein Biegemodell eines Balkens mit einer Aufspaltung der Durchbiegung in zwei unabhängige Komponenten vorgeschlagen.)

Man gelangt zu einer Segmentierung des Balkens in finite Balkenelemente, deren Wechselwirkung untereinander durch Gleichgewichts- und Stetigkeitsbedingungen für die elementbezogenen Kenngrößen festgelegt ist. Die Bedeutung der Randbedingungen erweitert sich entsprechend der Definitionen der Kenngrößen.

Bei der Anwendung dieser Methode sind stets zwei Schritte erforderlich: zum einen die Festlegung der Eigenschaften des finiten Elements und zum anderen die Segmentierung des zu beschreibenden Körpers in diese Elemente. Der erste Schritt ist eine Modellbildung im oben beschriebenen Sinne und nimmt Bezug auf Bilder und auf die Feder-Masse-Theorie. Der zweite Schritt erfolgt im Hinblick auf die angestrebte Rechenmethode zur Berechnung von Zielgrößen.

Die Weiterentwicklung der eigentlichen Modelle für die Beschreibung der Elemente erfolgt heute vorwiegend unter dem Gesichtspunkt der Optimierung der Rechenprozesse. Ein grundsätzlicher Fortschritt im Vergleich zu den 'technischen Modellen' ist für die Beschreibung von Biegewellenleitern im Rahmen einer Leitungstheorie nicht zu erwarten.

2.4.3 Modelle mit der Kontinuumstheorie

Die Kontinuumstheorie erlaubt, elastische Körper ohne Bezug auf Bilder im Rahmen von theoretischen Lastfällen axiomatisch zu beschreiben. Ein Lastfall kennzeichnet einen Satz von äußeren Randbedingungen für Spannungen bzw. Verzerrungen in der Oberfläche eines elastischen Körpers; er beinhaltet in der Regel auch Annahmen über den inneren Spannungs- bzw. Verzerrungszustand, über die Anwesenheit und Wirkung von Volumenkräften und über die Form und die Symmetrie des Körpers.

In der Literatur wird bis auf seltene Hinweise in den einführenden Kapiteln (z.B. in /54 oder /55/) der theoretische Lastfall mit einem Modell gleichgesetzt, z.B. in /56/ S.11. Die Notwendigkeit einer Modellbildung in dem hier verwendeten Sinne wird dadurch verdeckt, daß im allgemeinen bereits bei der Formulierung und Berechnung von Lastfällen innerhalb der Theorie Vereinfachungen und Vernachlässigungen erforderlich werden. Nur sehr wenige spezielle Lastfälle lassen sich exakt lösen. Dem Einfluß von Bildern und den aus ihnen folgenden Einschränkungen wird in Anbetracht der Komplexität der mathematischen Rechnung in der Regel keine Beachtung geschenkt.

Die Entwicklung eines Modells des Biegebalkens auf der Grundlage der Kontinuumstheorie setzt rechenbare Lastfälle voraus, die zur Biegung führen. Ein allgemeiner Lastfall für das Problem 'einfache Balkenbiegung' kann nicht formuliert werden; Spezialfälle sind jedoch lösbar. Als Grundlage für weitere Betrachtungen werden zunächst in Abschnitt 2.4.3.1 die Lösungen von zwei Lastfällen vorgestellt.

Das Prinzip und die Probleme der Modellbildung werden danach in Abschnitt 2.4.3.2 als Grundlage zur Beurteilung der Balkenmodelle mit der Kontinuumstheorie im Hinblick auf ihre Verwendung zur Beschreibung von Biegewellenleitern dargestellt.

2.4.3.1 Theoretische Lastfälle der Biegung

Es sind bis heute Lösungen für vier Lastfälle der Biegung eines Balkens bekannt: für die Biegung durch ein Moment, für die Biegung durch eine Querkraft, für die Biegung durch eine gleichmäßig über eine Seitenfläche des Balkens verteilte Last und für die Ausbreitung von Biegewellen in unendlich langen Kreiszyllindern.

Die beiden erst genannten statischen Lastfälle sind ohne weitere Einschränkungen lösbar. Sie sollen daher in gedrängter Form vorgestellt werden und in Abschnitt 2.4.3.2 dazu genutzt werden, exemplarisch die prinzipiellen Schwierigkeiten bei der Modellbildung aufzuzeigen.

Biegung durch ein Moment

Beim Lastfall der Biegung durch ein Moment, der sogenannten 'reinen Biegung', geht man von einem zylindrischen Balken aus, der auf einer Stirnfläche ausschließlich durch ein Moment beaufschlagt ist. Es wird durch eine der Höhenkoordinate proportionale, von der Breitenkoordinate unabhängigen Normalspannungsverteilung auf der Stirnfläche erzeugt. Die Mantelfläche des Balkens ist spannungsfrei.

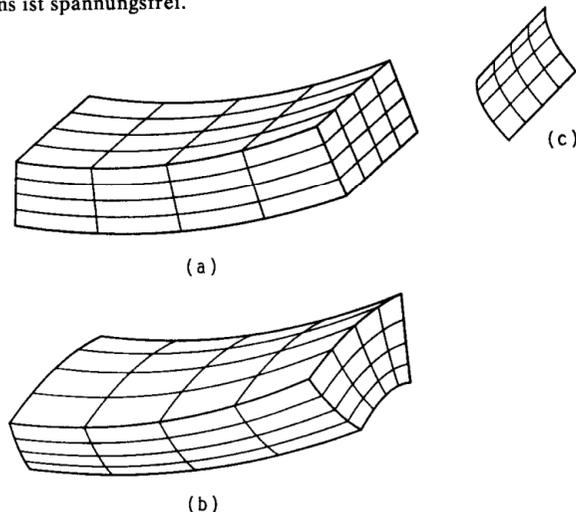


Abb. 2.7 Biegegeometrie eines durch ein Drehmoment gebogenen Balkens
 (a) mit einer Querkontraktionszahl von 0,3
 (b) mit einer Querkontraktionszahl von 6
 (c) belastete Stirnfläche des Balkens mit der Querkontraktionszahl 0,3 mit hundertfacher Übertreibung der Verwölbungen normal zum mittleren Drehwinkel der Stirnfläche

Die sich ergebende Biegegeometrie wird durch die Verschiebungen in Abhängigkeit von den Balkenkoordinaten, s. Gln. 2.8, beschrieben.

$$u(x,y,z) = -c \cdot xz \tag{2.8a}$$

$$v(x,y,z) = c \cdot \sigma yz \tag{2.8b}$$

$$w(x,y,z) = \frac{1}{2} c (x^2 + \sigma (x^2 - z^2)) \tag{2.8c}$$

Abb. 2.7a zeigt eine daraus resultierende Form eines gebogenen Balkens mit rechteckigem Querschnitt und einer willkürlich gewählten Länge bei einer realistischen Annahme einer Querkontraktionszahl von 0,3; Abb. 2.7b zeigt den gleichen Balken für eine übersteigerte Querkontraktionszahl von 6 zur Verdeutlichung der prinzipiell auftretenden Verzerrungen.

Abb. 2.7c zeigt noch einmal die belastete Stirnfläche des Balkens in Abb. 2.7a. Die Verwölbung normal zum mittleren Drehwinkel der Stirnfläche ist nun hundertfach verstärkt. Man kann erkennen, daß die Stirnfläche zylinderförmig konkav ausgebildet ist: auch ohne Auftreten einer Schubspannung in der Stirnfläche sagt die Kontinuumstheorie eine Verwölbung voraus.

Anmerkung

Eine Querkontraktionszahl von 6 ist unphysikalisch. Die Gleichungen zeigen jedoch, daß nur ein derart übertriebener Wert genügt, die Verzerrungen deutlich werden zu lassen.

Die Verzerrungen sind eine Folge der Annahme, daß die Normalspannung im Balken linear von der Höhenkoordinate z abhängt. Bei geeigneter Wahl der Normalspannungsverteilung über dem Querschnitt läßt sich erreichen, daß keine Verwölbung auftritt.

In diesem Lastfall können dem Balken alle Randbedingungen der Verschiebungen aufgeprägt werden, die keine Schubspannungen auf der Stirnfläche zur Befriedigung der lokalen Gleichgewichtsbedingungen erfordern. In den Abb. 2.7 sind die Randbedingungen der linken Stirnfläche so gewählt, daß keine Starrkörperbewegungen in den Verschiebungen auftreten und daß der Mittelpunkt der Stirnfläche ortsfest, $w(0,0,0) = u(0,0,0) = v(0,0,0) = 0$, und drehfest, $dw/dx(0,0,0) = 0$, gelagert ist.

Vergleicht man das Ergebnis dieses theoretischen Lastfalls der Kontinuumsstheorie mit den Bildern der Biegung, unterstützen sie für kleine Auslenkungen in hohem Maße die BERNOULLI'sche Annahme ebener Querschnittsflächen: im Grenzübergang Durchbiegung gegen null gehen die verwölbenden Terme in den Gln. 2.8 überproportional gegen Null.

Die Fasern auf halber Höhe ($z=0$) des Balkens bleiben neutral gegenüber Längsdehnungen. Dies unterstützt ebenfalls die BERNOULLI'schen Annahmen. Allerdings verformen sich die Querschnittsflächen kissenförmig. Der Krümmungsradius ihrer Randkurven ist proportional zur Querkontraktionszahl und zur Krümmung der neutralen Fasern.

Biegung durch eine Querkraft

Im Lastfall der Biegung durch eine Querkraft wird der Balken durch eine Schubspannung auf der Stirnfläche bei $x=1$ gebogen. Für die Schubspannung wird gefordert, daß ihre Wirkung der Wirkung einer auf dieser Stirnfläche angreifenden Querlast entspricht. Die Randbedingungen für die Schubspannung werden also nicht lokal, sondern integral über die Stirnfläche vorgegeben. Die Stirnfläche ist überall frei von Normalspannungen.

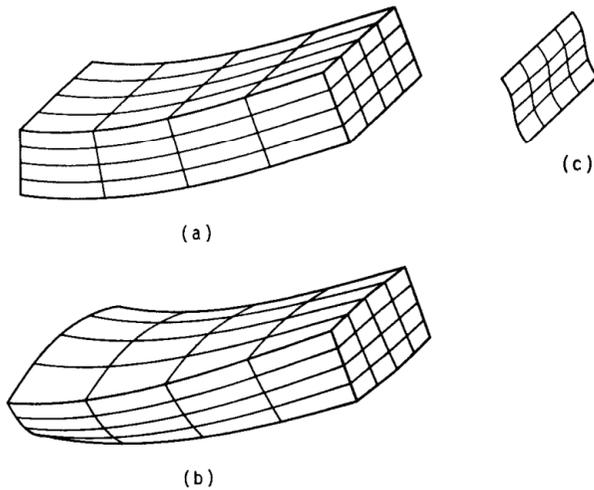


Abb. 2.8 Biegegeometrie eines durch eine Querkraft gebogenen Balkens
 (a) mit einer Querkontraktionszahl von 0,3
 (b) mit einer Querkontraktionszahl von 6
 (c) belastete Stirnfläche des Balkens mit der Querkontraktionszahl 0,3 mit hundertfacher Übertreibung der Verwölbungen normal zum mittleren Drehwinkel der Stirnfläche

Für die Stirnfläche bei $x=0$ gelten die gleichen Randbedingungen wie im Lastfall der Biegung durch ein Moment. Das Drehmoment (Biegemoment) baut sich proportional zum Abstand von der belasteten Stirnfläche auf und ist so über die Querschnitte verteilt, wie im Falle der Biegung durch ein Moment. Die Mantelfläche des Balkens bleibt spannungsfrei.

Die Lösung dieses Lastfalles ist abhängig von der Form der Stirnfläche. Es läßt sich zeigen, daß jede Querschnittsform eine eindeutige Schubspannungsverteilung auf der rechten Stirnfläche erzwingt. Eine geschlossene Lösung für diese Verteilung ist nur für wenige Querschnittsformen bekannt /57/. Zu ihnen gehören die wichtigen Fälle Kreis und Rechteck.

Die sich ergebende Biegegeometrie beschreiben die Verschiebungen in Abhängigkeit von den Balkenkoordinaten in den Gln. 2.9 (nach /57/).

$$u(x, y, z) = -\frac{C}{E_y I} \left[z \left(1x - \frac{1}{2}x^2 \right) + X + zy^2 \right] \tag{2.9a}$$

$$v(x, y, z) = \frac{C}{E_y I} \sigma (1-x) zy \tag{2.9b}$$

$$w(x, y, z) = \frac{C}{E_y I} \left[\frac{1}{2} (1-x) \sigma (z^2 - y^2) + \frac{1}{2} 1x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right] \tag{2.9c}$$

Die in Gl. 2.9a auftretende Funktion χ berücksichtigt die Abhängigkeit der Schubspannungsverteilung von der Querschnittsform. In Gl. 2.10 ist diese Funktion für den Kreis- (mit dem Durchmesser d) und in Gl. 2.11 für den Rechteckquerschnitt (mit der Höhe h und der Breite b) angegeben, s. /57/.

$$\chi(y, z, d) = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{8} + \frac{\sigma}{4} \right) d^2 z + \frac{1}{4} (z^3 - 3zy^2) \tag{2.10}$$

$$\chi(y, z, h, b) = \frac{1}{6} (2 + \sigma) (z^3 - 3zy^2) + \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma}{3} b^2 - (1 + \sigma) h^2 \right) z + \frac{\sigma b^3}{2\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{e^{2\pi n \frac{z}{b}} - e^{-2\pi n \frac{z}{b}}}{e^{\pi n \frac{h}{b}} + e^{-\pi n \frac{h}{b}}} \cos \left(2\pi n \frac{y}{b} \right) \tag{2.11}$$

Abb. 2.8a zeigt eine daraus resultierende Form eines gebogenen Balkens mit rechteckigem Querschnitt mit einer realistischen Annahme einer Querkontraktionszahl von 0,3; Abb. 2.8b zeigt den gleichen Balken für eine übersteigerte Querkontraktion von 6 zur Verdeutlichung der prinzipiell auftretenden Verzerrungen.

Wie in Abb. 2.7c wird in Abb. 2.8c der zur Verwölbung der Stirnfläche des Balkens von Abb. 2.8a beitragende Teil der Verschiebungen besonders herausgestellt. Bei dieser hundertfachen Verstärkung ist die nun dem Verwölbungsbild entsprechende Wirkung der ungleichmäßigen Schubspannungsverteilung zu erkennen.

Das Verschiebungssystem weist in diesem Lastfall nur noch die zentrale Faser als neutral gegenüber Längsdehnung aus. Die Verzerrungen der Querschnittsflächen sind abhängig von der Längskoordinate: eine Komplikation, die in den Bildern nicht angenommen wird.

2.4.3.2 Modellbildung

Zur Definition der kinematischen und dynamischen Kenngrößen in einem Modell stellt die Theorie das Vektorfeld der Verschiebungen und das Tensorfeld der Spannungen zur Verfügung, für die nur auf Näherungen beruhende Zusammenhänge vorliegen - mit Ausnahme der angegebenen Spezialfälle. Für die Formulierung eines sachgerechten eindimensionalen Modells für einen Biegewellenleiter sind aus den Theorieparametern z.B. durch mittelwertbildende Integrale Kenngrößen zu definieren. Die Definitionen hängen vom zur Modellbildung ausgewählten Lastfall ab, da Vereinfachungen und Vernachlässigungen lastfallabhängig anders zu beurteilen sind. Die Wahl des Lastfalles hängt wiederum vom Bild ab, das man zur Bildung des Modells benutzt.

◦ *Anmerkung*

Dies soll an einem Beispiel ausgeführt werden: Durch beide vorgestellten Lastfälle wird beispielsweise die Definition des Drehmoments (Biegemoments) als Integral der Normalspannung über die Querschnittsfläche nahegelegt. Das BERNOULLI-Bild erlaubt die gleiche Aussage. Dennoch ist diese Identifizierung eine vereinfachende Modellbildung, weil in beiden Lastfällen eine Normalspannungsverteilung in den Querschnittsflächen vorausgesetzt wird, die linear von z abhängt. Mit einer anderen Annahme über die Normalspannungsverteilung im Lastfall der Biegung durch eine Querkraft läßt sich das Problem nur nicht explizit lösen. Andere Annahmen widersprechen aber nicht den Axiomen der Kontinuumstheorie. Welche Annahme im realen Balken zutrifft, kann gegebenenfalls durch Beobachtung bestimmt werden, also durch Bilder.

Die Definition der Randbedingungen führt gegebenenfalls zu ähnlichen Problemen. Die Kontinuumstheorie fordert die Vorgabe der Komponenten der Verschiebungen oder Spannungen in jedem Oberflächenelement des zu beschreibenden Körpers. Diese lokalen Randbedingungen müssen den lokalen Gleichgewichtsbedingungen der Spannungen und den Kompatibilitätsbedingungen der Verschiebungen genügen. Die Umsetzung makroskopischer Randbedingungen eines realen Biegeproblems in die theoriebedingte, mikroskopische Form der Randbedingungen ist nicht in jedem Falle möglich. Das gleiche gilt für die Umkehrung.

Einerseits sind nicht alle phänomenologisch einsichtigen, makroskopischen Randbedingungen mit den lokalen Nebenbedingungen vereinbar. Dies betrifft z.B. die Vorgaben für die Querkraft. Wie bereits im Rahmen der Diskussion des Verwölbungsbildes ausgeführt, ist es unmöglich, auf der Stirnfläche eines Balkens eine gleichverteilte Schubspannung vorzugeben und sonst alle Spannungen auf dieser Fläche und den angrenzenden Mantelflächen zu Null zu setzen.

Andererseits lassen sich mikroskopisch formulierbare Randbedingungen in der Praxis nur näherungsweise realisieren. Typisches Beispiel für diese Schwierigkeiten sind die 'einfachen' Randbedingungen. Man benötigt entwe-

der ein über alle Maßen steifes Material zur Abstützung der Spannungen ohne auftretende Verschiebungen oder man benötigt ideale Punktlager z.B. als Drehgelenke, die die Querkräfte aufnehmen, die Verdrehung aber nicht behindern.

Die Definition der Balkenparameter in einem Modell mit der Kontinuumsstheorie ist unproblematisch. In der Theorie treten die Dichte und der elastische Tensor auf, der im isotropen Fall durch den YOUNG'schen Modul und durch den Schubmodul vollständig bestimmt ist. Vernachlässigt man die auslenkungsabhängigen Änderungen der Formparameter, lassen sich Biegesteifigkeit und Schubsteifigkeit des Balkens mit dem BERNOULLI-Bild und dem Schubelastischen Bild wie in den 'technischen' Modellen als EyI und GyF definieren. Die Angaben zu den Steifigkeiten sind dann lastfallunabhängig und stets eindeutig.

Benutzt man den Lastfall der reinen Biegung zur Modellbildung, bietet sich als Näherung für kleine Auslenkungen an, die makroskopischen Kenngrößen gerade so zu bilden wie bei den 'technischen' Biegemodellen. Denn die Biegegeometrie in Abb. 2.7a macht deutlich, daß Einwirkungen der Querschnittsverzerrung nur eine untergeordnete Bedeutung haben. Als Randbedingungen in einem solchen Modell sind nur die im Lastfall vorausgesetzten Annahmen erlaubt. Dies heißt insbesondere, daß keine Schubspannungen auf den Stirnflächen auftreten dürfen. Löst man sich von dieser Einschränkung, muß man die Schubelastizität des Balkens vernachlässigen. Man erhält das BERNOULLI-Modell - die Biegesteifigkeit ist hier notwendigerweise EyI - auf der Basis einer anderen Theorie.

Die Biegung durch eine Querlast verzerrt im direkten Vergleich zur Biegung durch ein Moment bei ähnlicher Auslenkung die Querschnittsfläche stärker und qualitativ in einer anderen Weise. Es liegt nahe, den Definitionen von TIMOSHENKO oder auch COWPER (s. Abschnitt 2.4.1.4) zu folgen und auch die Modellbildung so wie dort fortzusetzen. Allerdings ist in diesem Lastfall ein äußeres Drehmoment nicht erlaubt. Diese Einschränkung läßt keine allgemeinere Modellbildung zu, es werden geeigneter Lastfälle benötigt.

Zwei allgemeine Prinzipien können in der Kontinuumstheorie dazu dienen, weitere Lastfälle näherungsweise zu berechnen: das Superpositionsprinzip und das St. VENANT'sche Prinzip.

Das Superpositionsprinzip sagt aus, daß sich bei Überlagerung zweier unabhängiger Spannungssysteme auch die Verschiebungsfelder addieren. Aus der Betrachtung der beiden Biegelastfälle wird deutlich, daß dies nur dann eine gute Näherung sein kann, wenn die Auslenkungen so klein bleiben, daß die Formverzerrungen der Querschnittsflächen noch keine Rolle spielen, die Verzerrungen selbst also zu vernachlässigen sind. Unter Berücksichtigung dieser Einschränkung ist es dann möglich, Modelle auf der Basis verschiedener Lastfälle zu bilden.

Das St. VENANT'sche Prinzip sagt aus, daß ein lokales Spannungssystem, das in einem kleinen Teilvolumen eines Körpers aufgebracht wird und in der Summe keine resultierende Kraft- oder Momentenwirkung erzeugt, lediglich Verzerrungen hervorbringt, die in einem Abstand von diesem Teilvolumen vernachlässigbar sind, wenn dieser Abstand groß ist im Vergleich zu den Abmessungen des Teilvolumens.

Dieses Prinzip wurde lange Zeit als allgemeingültig betrachtet. v.MISES /58/ konnte jedoch zeigen, daß eine wesentliche Voraussetzung des Beweises von St. VENANT ist, daß der Körper wenigstens in einer Richtung unbegrenzt sein muß. Eine Anwendung auf allseitig begrenzte Körper ist nach v.MISES nicht gerechtfertigt.

Das St. VENANT'sche Prinzip wird in der Kontinuumstheorie extensiv als Argument benutzt, die Wirkung von lokalen Kräfteinträgen (von Punktkräften), wie sie z.B. von lokalen Stützkräften auftreten, oder die Wirkung von Randbedingungen auf komplizierteren Berandungsgeometrien in großen Abständen als gleichmäßig verteilt anzunehmen. Eine ausführliche Diskussion der Einbringung von äußeren Kräften im Hinblick auf die Biegung von Balken findet man bei FILON, /59/.

Bei der Fortpflanzung von Biegewellen ist nach Abschnitt 2.2.5 eine Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von der reziproken Wellenzahl und den Querabmessungen des Balkens zu erwarten. Um diesen Aspekt in ein Modell umsetzen zu können, ist ein Lastfall in der Kontinuumstheorie zu formulieren, der dieser Vorstellung Rechnung trägt. POCHHAMMER /15/ und CHREE /16/ gelingt die Lösung für die Wellenausbreitung in unendlich langen Kreiszyklindern durch den Ansatz periodischer Randbedingungen. In der Nähe der Oberfläche begrenzter Körper können komplizierte Spannungs- und Verzerrungszuständen auftreten, die die Wellenausbreitung wesentlich beeinflussen. Es fehlen geeignete Bilder des Einflusses der Oberflächen, die zu einer zuverlässigen Modellbildung herangezogen werden können.

Auch im Rahmen der Modellbildung mit der Kontinuumstheorie kann man die dynamischen Aspekte durch die Einführung effektiver Elastizitätsmoduln berücksichtigen. Bei der dynamischen Biegung ergeben sich natürliche Grenzen des E-Moduls. Bei großen reziproken Wellenzahlen im Vergleich zu den Querabmessungen des Balkens wird sich der YOUNG'sche Modul ergeben, da die Querkontraktion unbehindert ist. Im Grenzfall kleiner reziproker Wellenzahlen im Vergleich zu den Querabmessungen des Balkens ist als E-Modul der für die Platte geltende Modul (zum Plattenmodul s. z.B. /54/) zu erwarten, weil die Querkontraktion aus dynamischer Sicht in der Kernzone des Balkens blockiert ist.

Die dynamische Abhängigkeit des E-Moduls führt dazu, daß auch die Phasengeschwindigkeit von Biegewellen bei konstanter Wellenzahl eine Funktion der Balkenabmessungen wird. Es gibt in der Literatur eine große Anzahl von Vorschlägen, diese Funktion näherungsweise mit der Kontinuumstheorie zu berechnen, s. z.B. /62/ oder /63/.

Zur Abschätzung der quantitativen Auswirkung dieses Effektes auf die Phasengeschwindigkeit von Biegewellen zeigt Abb. 2.9 diese Funktion im Übergang von schmalen zu flachen zylindrischen Balken nach /63/. Der Einfluß bewirkt bei einer Querkontraktionszahl von 0,3 eine relative Veränderung der Phasengeschwindigkeit um ca. 5%. Eine Vernachlässigung des dynamischen Aspektes kann daher zu erheblichen Fehlern bei der Berechnung von Zielgrößen führen.

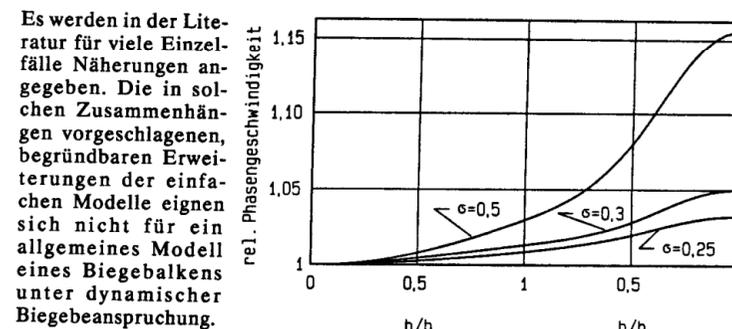


Abb. 2.9 Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von Biegewellen beim Übergang von schmalen zu flachen Balken nach GAZIS und MINDLIN /63/ für drei Querkontraktionszahlen

Eine konsequente Beschreibung von Biege- wellen auf Balken mit Hilfe der Kontinuumstheorie scheitert auch an den mathematischen Schwierigkeiten, Biegelastfälle zu rechnen. Ein weiterer entscheidender Grund liegt aber darin, daß Biegemomente und Querkräfte in aufwendigeren Lastfällen nicht mehr lokal definierbar sind, sondern in der Nähe von Stirnflächen von der weiteren Umgebung abhängen, s. KARMAN /64/ und SEEWALD /65/. Damit ist eine wesentliche Voraussetzung für die Ableitung eines eindimensionalen Modells nicht gegeben. Für Modelle zur Beschreibung von Ultraschall-Biegewellenleitern im Rahmen einer Leitungstheorie, die essentiell von der lokalen Definition der Kenngrößen aus den Feldgrößen abhängt, ist daher von den Konzepten der Kontinuumstheorie ein sachgerechter Fortschritt nicht zu erwarten.

3 Beurteilung der Modelle

3.1 Einführung

Die Beurteilung der Modelle im Hinblick auf die Beschreibung von Ultraschall-Biegewellenleitern bedarf der Definition von Bewertungskriterien. Der Biegewellenleiter ist aus Kompatibilitätsgründen als Leitung im Rahmen einer akustischen Netzwerk- bzw. Leitungstheorie zu beschreiben. Eine eindimensionale Leitungstheorie fordert die Möglichkeit, den Leiter in Abschnitte zu segmentieren, diese Abschnitte als Leitungsstücke einzeln zu beschreiben und sie über ihre Feldgrößen aneinander anzuschließen. Daraus folgt, daß die kinematischen und dynamischen Kenngrößen der Biegemodelle als Feldgrößen definierbar sein müssen, die dann als Klemmengrößen den Zustand der Leitung an jeder Stelle vollständig und eindeutig kennzeichnen.

Aus grundsätzlichen Überlegungen, s. /66/, ist zu fordern, daß das Modell den Biegewellenleiter als reziprok beschreibt. Das Reziprozitätstheorem verlangt lineare Zusammenhänge zwischen den Klemmengrößen an verschiedenen Stellen der Leitung und erzwingt Nebenbedingungen zwischen den Koeffizienten der linearen Gleichungen.

Darüber hinaus werden im Hinblick auf die Zuverlässigkeit des Modells zur Beschreibung von Biegeschwingungen typische Kriterien herangezogen: Ein Modell zeichnet sich aus durch die Genauigkeit der quantitativen Voraussagen und durch den Grad der Vollständigkeit der Erfassung der qualitativen Aspekte der Wellenausbreitung. Grundlage der Beurteilung beider Kriterien soll eine meßtechnische Auswertung von Parametern der Biegeschwingungen sein, die selbst unabhängig von den zu bewertenden Modellen ist. In den Abschnitten 3.3 und 3.4 wird deshalb zunächst ein solches Meßverfahren etabliert und begründet, bevor im Abschnitt 3.5 die Modelle durch einen Vergleich mit den Meßwerten bewertet werden.

In Abschnitt 3.2 wird zunächst abgeschätzt, inwieweit die Voraussetzungen der 'einfachen Balkenbiegung' bei den Messungen und bei den Anwendungen in der Ultraschalltechnik verifiziert sind.

3.2 Verletzung der Voraussetzungen der 'einfachen Balkenbiegung'

Die Diskussion folgt, soweit sie zu den Voraussetzungen erforderlich ist, der Reihung und Kennzeichnung aus Abschnitt 2.2.1.2:

(a) Zur Überlagerung durch andere Lastfälle

Biegewellenleiter sind - entgegen der Voraussetzung der Modelle - in Ultraschall-Apparaturen z.B. durch die Halterungen durch zusätzliche Spannungssysteme belastet. Zur prinzipiellen Abschätzung der Größenordnung der durch diese überlagerten Lastfälle auftretenden Einflüsse auf die Biegeschwingungen können die Untersuchungen von SCHÄFER /67/ herangezogen werden. Aus seinen Berechnungen kann der Einfluß einer Längsdehnung durch eine zusätzliche Zugspannung auf die Biegeeigenfrequenzen eines freien Kragbalkens abgeleitet werden. Bei einer Dehnung um 0,1% ergibt sich danach bei einem Balken mit $h/l=0,1$ eine Erhöhung der untersten Eigenfrequenz von ungefähr 5%. Der Einfluß steigt mit der Längsdehnung und sinkt quadratisch mit h/l . /67/ enthält auch einen Überblick über die Literatur zu dieser Fragestellung. Für andere Lastfälle findet man Anhaltspunkte in /68/, /69/ und /70/.

(c) Zur Voraussetzung kleiner Verdrehungen

Bei den Messungen kann die Voraussetzung kleiner Verdrehungen gewährleistet werden, wenn man kritische Geometrien vermeidet, die durch Spannungsüberhöhungen lokale Überdehnungen erzeugen können. Da bei Ultraschallwellenleitern mit Schwingungsamplituden bis zu einigen $100 \cdot 10^{-6}$ m bei reziproken Wellenzahlen im cm-Bereich zu rechnen ist, wird diese Bedingung auch bei vielen Anwendungen eingehalten werden können.

(d) Zur Homogenität des Werkstoffes

Abb. 3.1 zeigt eine Dichtemessung an einer Aluminiumprobe einer handelsüblichen Werkstoffqualität, die zur Herstellung von Wellenleiter geeignet ist.

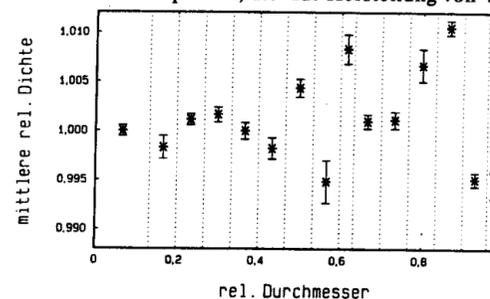


Abb. 3.1

Mittlere relative Dichte in den Ringzonen einer Kreisscheibe aus Aluminium

Dargestellt ist die mittlere relative Dichte, die für die punktiert angedeuteten Ringzonen der Probescheibe ermittelt wurde. Die Messung zeigt Streuungen der Dichte, die in den Randzonen des Halbzeuges bis zu 1% betragen können. Die Homogenität dieses Materials ist nur in beachtlichen Grenzen gewährleistet. Die aus dieser Messung abzuleitende Schwankungsbreite der Dichte des Vollmaterials über dem Durchmesser erreicht maximal 0,2%. SPINNER, REICHARD und TEFT /30/ erhalten bei der Gegenüberstellung der Dichten zwischen ihren aus einer Charge geschnittenen Stahlproben relative Abweichungen von maximal 0,08%.

(e) Zur Isotropie der Werkstoffe

Die Isotropie eines Werkstoffes, z.B. eines handelsüblichen Aluminiumwerkstoffes, entsteht durch polykristalline Verbindung von anisotropen Mikrostrukturen mit statistisch gleichverteilten Orientierungen. Bedingt durch den Herstellungsprozeß des Werkstoffes bzw. durch die Fertigung des Werkstückes ist die Isotropie in realen Balken bzw. Wellenleitern durch Eigenspannungen und durch Verfestigung gestört. Wie groß dieser Einfluß ist, wird in der Literatur erst in jüngster Zeit diskutiert. Die Untersuchungen von KING /71/ deuten darauf hin, daß der Einfluß von untergeordneter Bedeutung ist.

(f) Zur Voraussetzung eines linearen HOOKE'schen Gesetzes

Eine Abschätzung nichtlinearer Effekte erlauben die theoretischen Untersuchungen von CHU und HERRMANN /72/. Abb. 3.2 zeigt die zu erwartenden Abweichungen der Resonanzfrequenz eines Balkens bezogen auf die lineare Näherung in Abhängigkeit vom Verhältnis der Auslenkung zur Balkenhöhe.

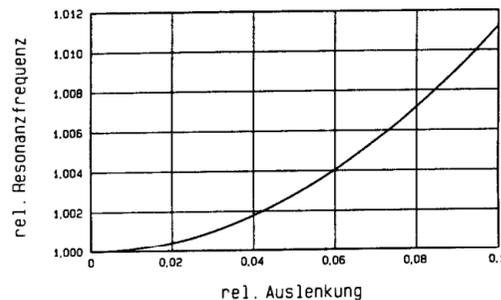


Abb. 3.2 Einfluß nichtlinearer Effekte auf die Resonanzfrequenz einer freien Biegeschwingung (nach CHU und HERRMANN /72/)

(g) Zur Voraussetzung adiabatischer Zustandsänderung

Die Temperaturabhängigkeit der Elastizitätsmoduln (für Aluminium typisch - 0,04%/K im Bereich 300 K) und die Wärmeausdehnung (für Aluminium typisch ca. $24 \cdot 10^{-6}/K$) bestimmen im wesentlichen die Einflüsse der Temperatur auf

die Balkenbiegung. Die zur Bewertung der Modelle angestellten Messungen werden bei so kleinen Auslenkungen durchgeführt, daß keine entscheidenden Temperaturerhöhungen durch innere Verluste auftreten. Bei Anwendungen in der Ultraschall-Energietechnik können erhebliche Temperaturerhöhungen auftreten, die z.B. signifikant die Resonanzfrequenz erniedrigen, so daß gegebenenfalls eine Nachführung der Betriebsfrequenz erforderlich ist.

Der Einfluß der Wärmeleitfähigkeit spielt zunehmend bei kürzeren reziproken Wellenzahlen eine Rolle, weil dann während der Schwingung zwischen Schwingungsminima und -maxima nennenswerte Ausgleichsvorgänge ablaufen können: die Zustandsänderungen werden isotherm. Der Unterschied zwischen dem adiabatischen und dem isothermen E-Modul kann nach GRÜNEISEN, s. FÖRSTER /59/, auf ca. 0,02% bei einer Temperatur von 300 K geschätzt werden.

3.3 Auswahl der Meßverfahren

Zunächst sei vorausgesetzt, daß die Materialkonstanten und die Abmessungen des Balkens zuverlässig und genau bekannt, die Voraussetzungen der 'einfachen Balkenbiegung' hinreichend erfüllt und die Randbedingungen jeweils im Sinne der Modelle vorgebar sind. Dann bieten sich einerseits die Kenngrößen selbst und andererseits direkt oder indirekt ableitbare Funktionale der Kenngrößen als Meßgrößen in Abhängigkeit einer zeitinvarianten, monofrequenten Erregung an. Zur zweiten Gruppe der Meßparameter gehören z.B. die Ausbreitungsgeschwindigkeit, die Resonanzfrequenzen von Leitungsstücken und die in Abhängigkeit von der Frequenz bestimmten Übertragungsfunktionen, zu denen insbesondere Verhältnisse zwischen Kenngrößen gehören (z.B. spezifische Impedanzen, s. Abschnitt 5.2.3). Es ist zunächst zu untersuchen, welche Meßverfahren für Querkräfte und Drehmomente, Durchbiegungen und Verdrehungen für den schwingenden Balken zur Verfügung stehen.

In diesem Zusammenhang ist eine Vorbemerkung erforderlich: Eine übliche Methode der Schwingungsanalyse ist das Studium des prinzipiellen Verhaltens der Schwinger an Ersatzsystemen. Gestützt auf das Ähnlichkeitsprinzip, erzeugt man diese Ersatzsysteme durch isometrische Vergrößerung oder Verkleinerung aller Abmessungen. Dadurch transponiert man die Messung in leichter zugängliche Bereiche der Meßparameter. Bei der Vermessung longitudinaler Schwingungen eines Balkens ist die Etablierung solcher Ersatzsysteme leicht möglich, weil die Schallausbreitung in guter Näherung nur von den relativen und nicht von den absoluten Abmessungen dieser Wellenleiter abhängt. Beim Biegewellenleiter ist diese Methode problematisch, weil sich seine Parameter auch in erster Näherung nicht isometrisch ändern, und im Hinblick auf einen Modellvergleich nicht sachgerecht, weil die wichtigen Modelle versuchen, die meßbaren Effekte höherer Ordnung zu berücksichtigen. Sachgerechte Meßverfahren müssen daher bei den Abmessungen und folglich bei den Frequenzen durchgeführt werden, für die die Modelle verifiziert werden sollen.

Für die Messung der dynamischen Kenngrößen Kraft und Drehmoment sind keine hier einsetzbaren Meßwertaufnehmer bekannt. Experimentelle Spannungsanalysen werden mit der Methode der Spannungsoptik (in der Regel an Ersatzsystemen) durchgeführt; dieses Verfahren erlaubt aber in diesem Zusammenhang keine genügend genauen quantitativen Messungen.

Für die Messung der kinematischen Kenngrößen kann ihre Bestimmung auf die Messung der Verschiebung bzw. der Schnelle - die zeitliche Ableitung der Verschiebung - zurückgeführt werden. Auch für diese Parameter existieren qualitative Meßverfahren, z.B. holographische Bildtechniken, siehe z.B. LEISSA /73/, oder die Abtastung der abgestrahlten Schallintensität. Das letztere Verfahren ist allerdings wegen des komplizierten Luftschallfeldes einer Biegeschwingung in bezug auf die erzeugende Festkörperschwingung kaum aussagefähig.

Für die quantitative Messung der Verschiebungen bzw. der Schnellen an der Oberfläche der Wellenleiter stehen neben mechanisch abtastenden, piezoelektrischen oder elektrodynamischen Meßwertaufnehmern berührungslos einsetzbare kapazitive und elektrodynamische Aufnehmer zur Verfügung. Alle Aufnehmer sind sensitiv für eine Richtung des Verschiebungs- bzw. Schnellevektors in der Oberfläche und mitteln jeweils über ihre Kontakt- bzw. effektive Kopplungsfläche. Die mechanisch koppelnden Wandler haben den entscheidenden Nachteil, daß sie zu einem Bestandteil des Schwingensystems werden und die Schwingung nicht nur dämpfen, sondern mit bestimmen können. Dieser Einfluß ist bei berührungslosen Wandlern geringer; sie sind deshalb zu bevorzugen. Da allerdings die absolute Empfindlichkeit der berührungslosen Wandler in erheblichem Maße von der Einbaugeometrie abhängt, lassen sich mit diesen Wandlern nur genügend zuverlässige Meßverfahren konzipieren, wenn diese Wandler in relativen Messungen hoher Genauigkeit eingesetzt werden können.

• *Anmerkung*

Im Vergleich zu denkbaren Verfahren mit den oben beschriebenen Wandlern sind mit interferometrischen Meßverfahren höhere absolute Genauigkeiten zu erreichen. Von HERBERTZ und JAIN wird in [74] ein Meßverfahren auf der Basis eines Einstrahlinterferometers vorgeschlagen, das es prinzipiell gestattet, punktweise den Betrag und die Phase der Normalkomponente der Schnelle über eine schwingende Oberfläche abzutasten. Das Meßverfahren ist aber noch nicht so weit entwickelt, daß es im Hinblick auf eine Vermessung einer schwingenden Balkenstirnfläche oder -deckfläche anwendbar ist.

Zur Bewertung von Modellen zur Beschreibung des Schwingungsverhaltens von Ultraschall-Biegewellenleitern bieten sich daher einerseits die Messung von Übertragungsfunktionen in Abhängigkeit von der Frequenz - insbesondere die daraus abzuleitenden Resonanzfrequenzen und Güten - und andererseits die Messung des Amplitudenprofils auf den Oberflächen an. Bei beiden Meßverfahren kann man sich auf relative Meßmethoden beschränken.

3.4 Bereitstellung der Bewertungsgrundlage

3.4.1 Auswahl eines Probekalkens

Im Rahmen dieser Untersuchungen ist es nicht möglich, die Aussagefähigkeit der Modelle in der gesamten Variationsbreite der Balkenparameter zu bewerten. Es sind Variationen der Werkstoffparameter - insbesondere der Querkontraktionszahl als Funktion des Verhältnisses von E_Y/G_Y -, Variationen der Kontur des Balkens und Variationen seiner Abmessungen in Verbindung mit dem Frequenzbereich - insbesondere das Verhältnis der Balkenhöhe zu den reziproken Wellenzahlen - möglich. Deshalb können hier lediglich Messungen und Rechnungen an einem ausgewählten Probekalken als Bewertungsgrundlage der Beurteilung der Modelle bereitgestellt werden.

Die Parameter des Probekalkens werden dabei im Hinblick auf die Anwendung in der Ultraschalltechnik, unter Berücksichtigung des gemeinsamen Gültigkeitsbereichs der Modelle und unter Beachtung des Meßbereiches der eingesetzten Meßtechnik gewählt: Der Probekalken ist ein glatter, scharfkantig belassener Quader. Er ist aus einem handelsüblichen Aluminiumwerkstoff gefertigt, der auch für die Herstellung von Ultraschall-Wellenleitern geeignet ist. Der Probekalken weist eine Kantenlänge von $l=353$ mm, eine Breite von $b=39,5$ mm und eine Höhe von $h=19,5$ mm auf.

• *Anmerkung*

Im Vergleich zu den scheinbar einfacheren Querschnittsformen rund oder quadratisch hat diese Form den Vorteil, daß um seine beiden Querachsen unterschiedliche Biegespektren auftreten, die in der Messung eindeutig zu trennen sind. Dagegen zeigt das typische Bild einer Biegeresonanz eines runden oder quadratischen Balkens meist zwei eng benachbarte Resonanzen. Die Entstehung von zwei Biegemoden ist auf Unsymmetrien des Balkens, die zwei ungleiche Biegesteifigkeiten in Richtung der beiden Hauptträgheitsachsen zur Folge haben, zurückzuführen. Da sich die Unsymmetrien auch z.B. schraubenförmig über die Balkenlänge verteilen können, ist bei diesen Balkenformen jeweils eine aufwendige Modalanalyse erforderlich.

3.4.2 Messungen am Probekalken

Die Messungen am Probekalken werden mit dem in Anhang A beschriebenen Meßplatz zur Modalanalyse von Wellenleitern für den Frequenzbereich bis ca. 50 kHz durchgeführt. Für die Schwingungserregung und für die Messung der Schnelle werden berührungslos abtastende elektrodynamische bzw. kapazitive Wandler benutzt. Bei den Messungen der Resonanzfrequenzen wurden der Sendewandler und der Empfangswandler an den gegenüberliegenden freien Stirnflächen des Wellenleiters positioniert und der Schwingungsform entsprechend ausgerichtet. Zur qualitativen Identifizierung der Schwingung wurde

der Empfangswandler am Wellenleiter entlang geführt und die Ortsabhängigkeit der Phase und des Betrages der Schnelle qualitativ beobachtet. Die Zuordnung der Schwingung zum jeweiligen Spektrum war stets eindeutig möglich.

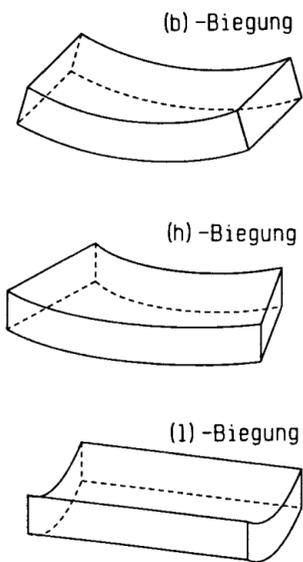


Abb. 3.3 Zur Bezeichnungsweise der Biegeschwingungen des Balkens um seine drei Hauptachsen

Für Dehn- und Drehwellen ist die Maßzahl gleichbedeutend mit der Anzahl der Schnelleknoten in Ausbreitungsrichtung; bei den Biegeschwingungen entsprechend gleich der Anzahl der Knoten der Drehgeschwindigkeit (bzw. der um 1 verminderten Anzahl der Knoten der Querschnelle). Solange diese Regeln gelten sind die Resonanzen durch Linien verbunden.

Die vollständige Modalanalyse des Probek balkens zeigt im Meßbereich bis 50 kHz 63 Resonanzschwingungen. Davon gehören 7 Resonanzen zum Spektrum longitudinaler Dehnschwingungen und 14 Resonanzen zum Spektrum der Drehwellen. Die übrigen Resonanzen sind auf Biegungen des Balkens zurückzuführen.

Für die folgenden Darstellungen werden die Hauptachsen des quaderförmigen Probek balkens als Breiten-, Höhen- und Längsachse des Balkens bezeichnet. Der Balken kann um jede der Achsen Biegeschwingungen ausführen, (s. Abb. 3.3).

Es wird vereinbart, die drei Biegespektren durch den Präfix der Achsenbezeichnung zu kennzeichnen. Von den verbleibenden 41 Resonanzen gehören 15 zum (b)-Biege wellen-Spektrum, 18 zum (h)-Biege wellen-Spektrum und 9 zum (l)-Biege wellen-Spektrum.

In Abb. 3.4 sind die Resonanzen der auftretenden Schwingungsspektren in Abhängigkeit von der Frequenz nach der Ordnung der jeweiligen Schwingung aufgetragen.

Für das Dehnwellen-, das Drehwellen-, das (b)-Biege wellen- und für den unteren Teil des (h)-Biege wellen-Spektrums ist das Maß, Ordnung der Schwingung, ein-

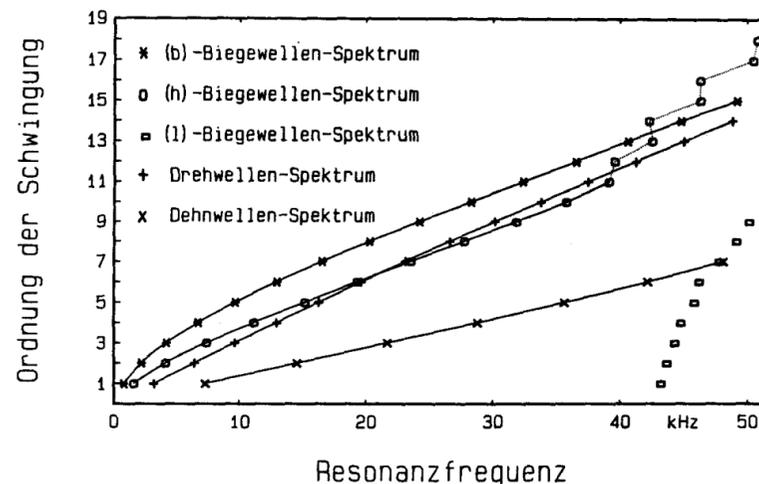


Abb. 3.4 Zuordnung der gemessenen Resonanzfrequenzen zu den Schwingungsspektren

Im oberen Teil des (h)-Biege wellen-Spektrums gilt diese Regel nicht: die Zuweisung einer Ordnung erfolgt zunächst pragmatisch im Vorgriff auf theoretische Ergebnisse. Die Messungen sind hier durch Punkte verbunden.

Bei der Darstellung der Messungen zum (l)-Biege wellen-Spektrum erfolgt die Zuweisung einer Ordnung willkürlich in monoton aufsteigender Folge der auftretenden Resonanzfrequenzen. Die Schwingungsformen des (l)-Spektrums zeichnen sich im untersuchten Frequenzbereich durch zwei Schnelleminima entlang der Breitenkoordinate aus; sie gehörten alle zur ersten Ordnung dieses Spektrums, wenn man der Diktion der Knotenregel in Ausbreitungsrichtung folgen könnte. Allerdings ist nur die erste Schwingung konphas in Längsrichtung des Balkens. Die übrigen Schwingungen des (l)-Spektrums bilden auch entlang der Längsachse Minima und Maxima aus, die mit einer Phasenumkehr der (l)-Schwingung verbunden ist. Die Anzahl der Extrema entlang der Längsachse nimmt zu. Man kann daraus schließen, daß das Spektrum wesentlich durch eine zumindest zweidimensionale elastische Kopplung geprägt ist.

Der Einsatz des (l)-Spektrums wird von den eindimensionalen Modellen mit einer Abweichung von kleiner als 0,5% vorausgesagt, wenn man für den E-Modul den Plattenmodul einsetzt. Bei der Erfassung der Feinstruktur des Spektrums bei derartig breiten Balken versagen die eindimensionalen Modelle qualitativ. Für quantitative Vergleiche wird dieses Spektrum deshalb im folgenden nicht mehr betrachtet.

Die Bereitstellung der vollständigen Übertragungsfunktion (die Schnelleantwort in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz) im Frequenzbereich bis 50 kHz für die verbleibenden (b)- und (h)-Biegewellen für einen Vergleich mit Modellrechnungen stößt auf erhebliche Probleme. Die Übertragungsfunktion wird außerhalb des unmittelbaren Resonanzbereiches so stark von der Schallabstrahlung in Luft beeinflusst, daß die Bestimmung der Übertragungsfunktion nicht genügend zuverlässig ist, um bei der Beurteilung der Modelle als hinreichend aussagefähiges Bewertungskriterium eingesetzt zu werden.

• Anmerkung

Gütemessungen an Drehschwingungen runder Stäbe aus einem handelsüblichen Aluminium Werkstoff liefern Werte bis zu 120.000, /60). Da dieser Schwingungsmod an runden Stäben in erster Näherung nicht durch Schallabstrahlung an Luft belastet ist, kann die innere Dämpfung des Aluminiumwerkstoffes nicht als Ursache für die erheblich geringeren Güten von Biegeschwingungen von typisch 20.000 angesehen werden. Für die Dämpfung der Biegeschwingungen ist offensichtlich in diesem Frequenzbereich allein die Abstrahlung an Luft maßgeblich.

Die Strahlungsimpedanz hängt wesentlich von der reziproken Wellenzahl der Biegewelle, von der Schallwellenlänge in Luft und insbesondere von der Meßanordnung ab. Gerade der letzte Aspekt führte zu erheblichen Meßunsicherheiten. In einer schlecht konditionierten Meßanordnung wurde z. B. ein Resonanzdüblett beobachtet, das durch eine zufällige, resonante Rückkopplung der Luftschallstrecke zwischen Balken und Laborisch entstanden war. Die Messung von Übertragungsfunktionen dieser Art ist daher nur unter Vakuumbedingungen zuverlässig. Unter Berücksichtigung dieser Aspekte kommt als Zielgröße der Auswertung der Messungen der Übertragungsfunktion nur die Resonanzfrequenz allein infrage.

Das Meß- und Auswerteverfahren, s. Anhang A, erlaubt bei der Bestimmung der Resonanzfrequenz eine Genauigkeit von besser als $5 \cdot 10^{-6}$. Diese Genauigkeit wird bei der Messung eines vollständigen Spektrums durch die Temperaturabhängigkeit der absoluten Lage der Resonanzfrequenzen erheblich vermindert.

Abb. 3.5 zeigt die relative Resonanzfrequenzänderung von jeweils 3 Biegeschwingungen der beiden Biegespektren in Abhängigkeit von der Tempera-

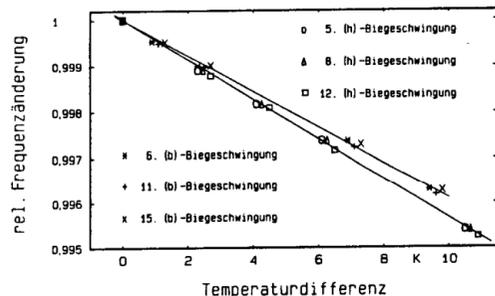


Abb. 3.5 Temperaturabhängigkeit der Resonanzfrequenzen für das (b)- bzw. (h)-Biegewellen-Spektrum des Probekalkens

turdifferenz für den Bereich 300 K. Es ergeben sich Driftkoeffizienten der Resonanzfrequenz von $-3,9 \cdot 10^{-4}$ 1/K/Hz für das (b)- bzw. $-4,4 \cdot 10^{-4}$ 1/K/Hz für das (h)-Biegewellen-Spektrum.

Der Genauigkeit von $5 \cdot 10^{-6}$ bei der Messung der Resonanzfrequenz entspricht daher eine erforderliche Temperaturkonstanz während der Messung von ca. 1/100 K. Diese Forderung ist in einem nicht thermostatisierten Meßplatz nicht zu erfüllen. Während der Messungen am Probekalken konnte die Temperatur auf 1/10 K konstant gehalten werden, so daß die Genauigkeit der Meßwerte für die Resonanzfrequenz auf $5 \cdot 10^{-5}$ absinkt.

Zur quantitativen Bewertung der von den Modellen vorausgesagten Ortsabhängigkeit der Querschnelle und der Drehgeschwindigkeit wurden mit dem Meßplatz Schnelleprofile entlang der Längsachse aufgenommen. Dabei ist die Normalschnelle in der Balkendeckfläche bei (b)-Wellen bzw. in der Balkenseitenfläche bei (h)-Wellen ein Maß für die Querschnelle; die entsprechend gemessene Tangentialschnelle in Längsrichtung ist ein Maß für die Drehgeschwindigkeit.

Die Genauigkeit der Meßwerte bei der Messung der Schnelleprofile ist durch die für jeden Meßpunkt erforderliche neue mechanische Positionierung beeinträchtigt, s. Anhang A. Der maximale Meßfehler kann zu 10% abgeschätzt werden.

Die Zuordnung der Meßgrößen zu den Modellgrößen wurde durch weitere Messungen der Schnelleprofile auf der Stirnfläche überprüft. Die Ergebnisse dieser Messungen werden im Zusammenhang mit den gerechneten Werten in Abschnitt 3.5 vorgestellt.

3.4.3 Rechnungen am Probekalken

Die Berechnung der von den Modellen für die Biegewellen-Spektren vorausgesagten Resonanzfrequenzen und der von den Modellen vorausgesagten Ortsabhängigkeit der Querschnelle bzw. der Drehgeschwindigkeit erfolgt mit der Kettenmatrixmethode, die im Rahmen der Diskussion der Rechenmethoden in Kap.4 erläutert wird.

Durch Konvergenzuntersuchungen wurde sichergestellt, daß eine Segmentierung des Balkens in finite Elemente mit der Länge 10^{-5} mm auch für den besonders kritischen Bereich des (b)-Biegewellen-Spektrums zwischen 10 kHz und 30 kHz zuverlässige Ergebnisse im Rahmen der erforderlichen Genauigkeit liefert. Für die Berechnung des Probekalkens ist daher eine Potenzierung der 4x4 komplexwertigen Kettenmatrix eines Balkenelements mit dem Exponent 586602 erforderlich. Der eingesetzte Tischrechner vom Typ IBM PC/AT03 benötigt bei einer Stellenbreite von 16 Dezimalen für die Rechnung ca. 2 s.

Die zur Ermittlung der Resonanzfrequenzen numerisch durchzuführende Iteration wird nach 8 genauen Stellen für die Frequenz abgebrochen. Zu der in der Literatur häufig geführten Diskussion über die prinzipielle Konvergenz

und Genauigkeit des Kettenmatrixverfahrens wird im Rahmen der Behandlung der Rechenmethoden in Kap.4 und unter anderem Aspekt in Anhang B Stellung genommen. Die Genauigkeit der hier ermittelten Rechenergebnisse wird aus anderen Gründen durch diese Diskussion nicht berührt, wie die folgende Betrachtung zeigen wird.

Die Genauigkeit der Rechenwerte hängt empfindlich davon ab, wie genau die Materialkonstanten und die Abmessungen des Balkens bekannt sind. Die Probleme bei der Bestimmung der Dichte sind bereits im Zusammenhang mit den Betrachtungen zur Homogenität realer Werkstoffe diskutiert worden. Für die Dichte des Probekbalkens wurde $2.808,0 \text{ kg/m}^3$ gemessen. (Bei den Angaben der Werkstoffparameter werden alle sicheren Dezimalen angegeben.) Die Werte der elastischen Moduln beruhen zwangsläufig auch auf Messungen. Die Meßverfahren, die häufig zu ihrer Bestimmung verwendet werden, nutzen gerade die Schwingungsanalyse. Da man mit diesen Meßmethoden lediglich den effektiven Elastizitätsmodul E und den effektiven Schubmodul G bestimmen kann, sind stets Modelle der entsprechenden Schallausbreitung erforderlich, um aus den gewonnenen Meßwerten auf die Materialkonstanten E_Y und G_Y schließen zu können.

Ungenauigkeiten oder nicht sachgerechte Meßverfahren oder die Übernahme von Daten aus allgemeinen Quellen beeinträchtigen daher die Aussagekraft in unakzeptabler Weise. Deshalb sind experimentelle Überprüfungen in der Literatur häufig widersprüchlich. Wenn beispielsweise ein E_Y über ein TIMOSHENKO-Modell mit einem spezifizierten T_K bestimmt wurde, wird das gleiche Modell bei der rückwirkenden Bestimmung z.B. des T_K eine gute Übereinstimmung zeigen. Die Gefahr eines "Kreisschlusses" ist daher nicht ausgeschlossen. Die Methode kann noch unsicherer werden, wenn die Bestimmung eines Moduln von einer Hypothese der Querkontraktionszahl abhängig gemacht wird. Dies geschieht z.B. in /47/.

Neben den Biegewellen nutzt man auch Dehn- und Drehwellen zur Bestimmung der Moduln. Aber auch diese vermeintlich unabhängige Versuchsführung unterliegt den gleichen systemimmanenten Schwierigkeiten in den entsprechenden Modellen der Wellenausbreitung für Dehn- und Drehwellen.

Durch die folgende Versuchsführung wird hier versucht, diese Fehler so zu begrenzen, daß sie im Vergleich zu den Fehlern bei der Bestimmung der Abmessungen des Balkens und insbesondere zu deren Toleranzen auf den jeweiligen Oberflächen vernachlässigt werden können. Der Probekbalken mit den Nennabmessungen $353 \text{ mm} \times 39,5 \text{ mm} \times 19,5$ weicht von der idealen Quaderform nicht mehr als $+0,05 \text{ mm} / -0,00 \text{ mm}$ ab.

Die Bestimmung der elastischen Moduln E_Y und G_Y wird auf die Frequenzmessung der 1. Dehn- bzw. der 1. Drehschwingungsresonanz des Balkens gestützt. Dazu wird ebenfalls der in Anhang A beschriebene Meßplatz eingesetzt. Die Bestimmung der Moduln allein durch Resonanzfrequenzmessungen am Probekbalken selbst ist nicht genau genug, weil die Schallausbreitungsmodelle für Dehn- und Drehwellen in Stäben mit rechteckigem Querschnitt nicht

zuverlässig genug sind, /75/, /76/, /77/. Deshalb wird die Bestimmung der Moduln auf eine entsprechende Messung an runden Stäben zurückgeführt, bei denen die Schallausbreitungsmodelle der bezogenen Moden sehr gut bekannt sind, /8/, /12/.

Zu diesem Zweck wird ein zum Probekbalken formgleicher zweiter Balken aus der gleichen Charge des Werkstoffes gefertigt und die Resonanzfrequenzen der Dreh- und Dehnschwingung gemessen. Danach wird dieser Balken auf einen runden Querschnitt abgedreht und wiederum beide Moden gemessen. Aus dem Verhältnis der Resonanzfrequenzen der runden zur rechteckigen Balkenform des zweiten Balkens lassen sich nun Korrekturfaktoren ableiten, mit deren Hilfe man aus den Frequenzwerten am Probekbalken auf die grundlegenden elastischen Moduln zurückrechnen kann.

Diese aufwendige, aber sachgerechte Bestimmungsmethode ist zumindest unabhängig von den hier zu untersuchenden Biegemodellen. Die Genauigkeit der absoluten Werte der Moduln wird im wesentlichen durch die Meßunsicherheit in der Dichte bestimmt. Das Verhältnis der beiden Moduln wird allein durch die Meßgenauigkeit der Resonanzfrequenzmessung bestimmt.

Mit Hilfe dieser Methode ergibt sich für den Probekbalken ein YOUNG'scher Modul von $E_Y = 7428,42 \text{ MPa}$ und ein Schubmodul von $G_Y = 2620,20 \text{ MPa}$.

Die Genauigkeit der so erhaltenen Meßwerte für die Werkstoffparameter liegt in der gleichen Größenordnung wie die relative Toleranz der Abmessungen des Balkens. Die mit diesen Daten für die Werkstoff- und die Formparameter berechneten Werte für die Resonanzfrequenzen aus den Modellen können daher nicht genauer sein als die akkumulierte Wirkung der Unsicherheiten der Parameter im Sinne einer Fehlerfortpflanzung. Für die Rechenwerte ist insgesamt eine Genauigkeit von 0,01% zu erwarten. Die Rechenwerte sind damit unsicherer als die Meßwerte für die Resonanzfrequenz, für die eine Meßunsicherheit von 0,005% oben begründet wurde.

3.5 Vergleich der Modelle

3.5.1 Resonanzfrequenzen

Zur Beurteilung der Modelle werden zunächst die Meßwerte für die Resonanzfrequenzen am Probekörper mit den aus den Modellen berechneten Resonanzfrequenzen qualitativ und quantitativ verglichen.

Abb. 3.6 und Abb. 3.7 erlauben die Beurteilung der Notwendigkeit der Berücksichtigung der Drehträgeit und der Schubelastizität. Die Resonanzfrequenzen des BERNOULLI-Modells mit und ohne RAYLEIGH-Term weichen mit zunehmender Frequenz progressiv von den Meßwerten bei beiden Spektren ab. Die Einbeziehung des RAYLEIGH-Terms zeigt, daß die Berücksichtigung der Drehträgeit ein notwendiger Bestandteil eines dynamischen Biegemodells sein muß. Beide Vergleiche zeigen ebenfalls, daß der Einfluß der Schubelastizität zu einer weiteren entscheidenden Steigerung der quantitativen Übereinstimmung zwischen Modell und Meßwerten führt. Der Vergleich bestätigt auch für den Probekörper die Behauptung TIMOSHENKOs, daß die Schubelastizität auch eine wirksamere Korrektur der Modelle darstellt als die Drehträgeit, s./12/ und /17/.

Ein EULER-Modell würde in diesem Vergleich sehr gut mit den Meßergebnissen im Bereich der Frequenz übereinstimmen, bei der die Biegesteifigkeit entsprechend der Meßvorschrift bestimmt worden ist. In einem weiten Frequenzbereich werden die Voraussagen für die Resonanzfrequenz so abweichen wie beim BERNOULLI-Modell ohne Berücksichtigung der Drehträgeit.

Abb. 3.7 macht ein überragendes, qualitatives Argument deutlich. Während die Modelle ohne Schubelastizität ein monotoneres Auftreten von Biegeresonanzen prognostizieren, folgt das schubelastische BERNOULLI-Modell auch qualitativ richtig im gepunkteten Bereich der Kurven dem Verlauf der Meßwerte.

Schon in Abschnitt 3.4.2 wurde auf die Besonderheit dieses durch eine gepunktete Verbindung hervorgehobenen Bereichs des (h)-BiegeWellen-Spektrums hingewiesen. Bei allen Modellen, die die Schubelastizität berücksichtigen, zeigt die mathematische Lösung, daß es für einen Wellenleiter zwei grundsätzlich verschiedene Bereiche der Wellenausbreitung gibt. Bei gegebenen Form- und Werkstoffparametern existieren unterhalb einer kritischen Frequenz zwei harmonische und zwei exponentielle Lösungsfunktionen der Differentialgleichung; oberhalb dieser Frequenz sind in diesen Modellen alle Lösungen harmonische. Die kritische Frequenz ist gerade dann erreicht, wenn die reziproke Wellenzahl der im unteren Frequenzbereich ausbreitungsfähigen BiegeWellen genau so groß wird wie der Trägheitsradius des Querschnitts. Dieser Übergang wird im Rahmen der Theorie gekoppelter Leitungspaare in Abschnitt 5.6.2 ausführlich beschrieben und analysiert. Für das (b)-BiegeWellen-Spektrum liegt diese kritische Frequenz weit oberhalb des betrachteten Frequenz-

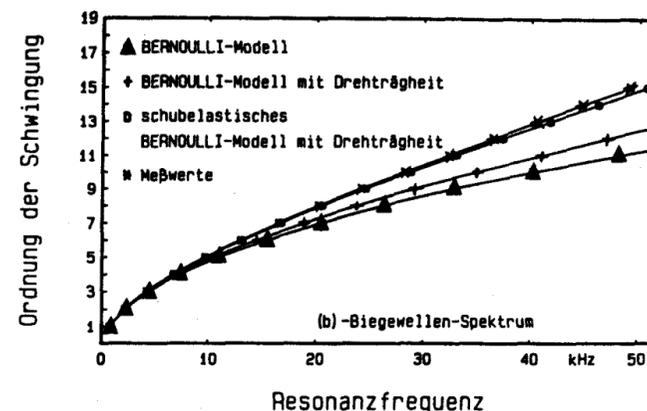


Abb. 3.6 Vergleich der gemessenen Resonanzfrequenzen des Probekörpers mit den Voraussagen aus Modellen für das (b)-BiegeWellen-Spektrum

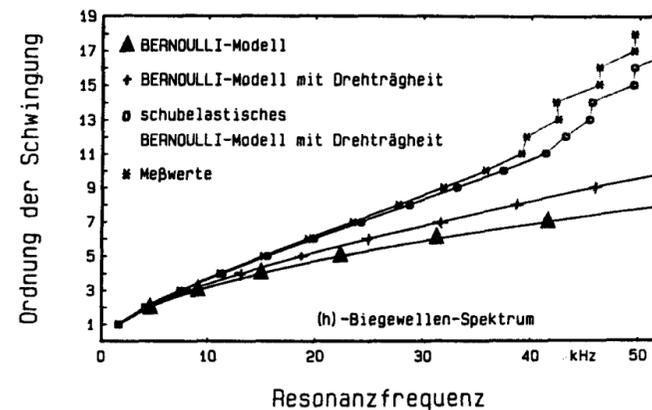


Abb. 3.7 Vergleich der gemessenen Resonanzfrequenzen des Probekörpers mit den Voraussagen aus Modellen für das (h)-BiegeWellen-Spektrum

bereiches. Für das (h)-Biegewellen-Spektrum ergibt sich die kritische Frequenz nach dem Schubelastischen BERNOULLI-Modell zu 42,637 kHz. Oberhalb dieser Frequenz existieren demnach zwei Biegemoden. Charakteristisch für den Übergangsbereich ist das Auftreten von eng benachbarten Resonanzfrequenzen.

Anmerkung

Es ist bemerkenswert, daß in der gesichteten Literatur von einer erfolgreichen Nachprüfung der durch die Modelle postulierten freien Schwingungen nicht berichtet wird. In der Regel wird dieses Ergebnis der Modelle als eine mathematische Absonderheit ohne physikalischen Hintergrund abgetan, s. Abschnitt 3.5.2.

Alle im folgenden betrachteten Modelle berücksichtigen die Drehträgeit und die Schubelastizität. Das Schubelastische BERNOULLI-Modell zeichnet sich durch die Eindeutigkeit seiner Balkenparameter und damit auch durch die Eindeutigkeit seiner Ergebnisse aus, da es einerseits nur auf lastfallunabhängige Werkstoffparameter zurückgreift und andererseits die klassischen Kenngrößen und Randbedingungen beibehält. Das Schubelastische BERNOULLI-Modell wird deshalb im folgenden als Bezugsmodell verwendet; die Aussagen der nun zu beurteilenden Modelle der TIMOSHENKO-Familie werden auf sein Ergebnis normiert. Gegenüber dem Bezugsmodell zeichnen sich diese Modelle durch eine andere Berücksichtigung der Schubelastizität und durch andere Ansätze der Biegesteifigkeit zur Berücksichtigung z.B. der Verwölbung aus.

Bei der Beurteilung der vielfältigen Modelle würde es über den Rahmen dieser Untersuchungen hinausgehen, auf jedes der vorgeschlagenen Modelle und Modellvariationen im einzelnen einzugehen. Der im folgenden beschriebene Weg erlaubt dennoch, die Aussagekraft aller eindimensionalen Modelle abzuschätzen:

Die Berechnung der Vorhersagen dieser Modelle für die Resonanzfrequenzen kann auf eine Variation der im Bezugsmodell ausschlaggebenden Form- und Werkstoffparameter zurückgeführt werden. Denn die numerische Analyse der Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von jedem dieser Parameter zeigt, daß eine lineare Näherung für diese Abhängigkeit für einen ausreichend großen Variationsbereich um die Resonanzfrequenz ausreichend genaue Werte liefert. Deshalb kann auch die Wirkung eines modifizierten bzw. korrigierten Balkenparameters durch die Betrachtung der relativen Änderung der Resonanzfrequenz bezogen auf die relative Änderung des Parameters - wobei alle anderen Parameter festgehalten werden - im Bezugsmodell aufgezeigt werden. Diese Funktion der Resonanzfrequenz wird im folgenden 'relatives Differential' genannt. In Abb. 3.8 sind die relativen Differentiale für die Balkenlänge, die Balkenhöhe, den E-Modul, den Schubmodul, die Querkontraktionszahl und für die Dichte für das (b)-Spektrum und in Abb. 3.9 für das (h)-Spektrum in Abhängigkeit von der Frequenz aufgetragen.

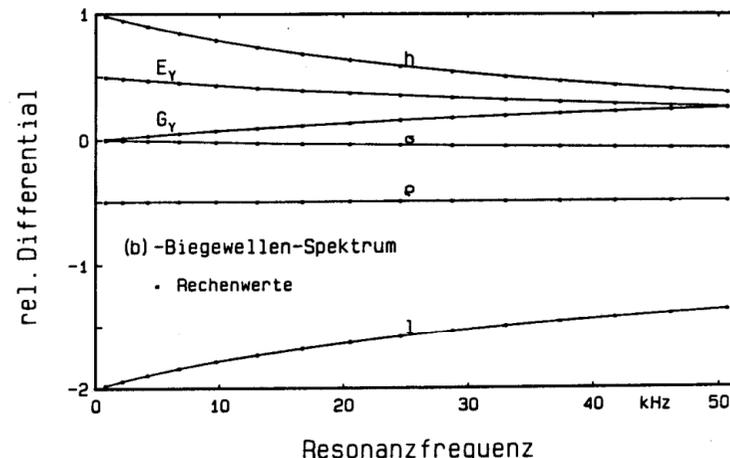


Abb. 3.8 Relative Differentiale der Resonanzfrequenz bezogen auf die relative Änderung von Balkenparametern in Abhängigkeit von der Resonanzfrequenz für das (b)-Biegewellen-Spektrum

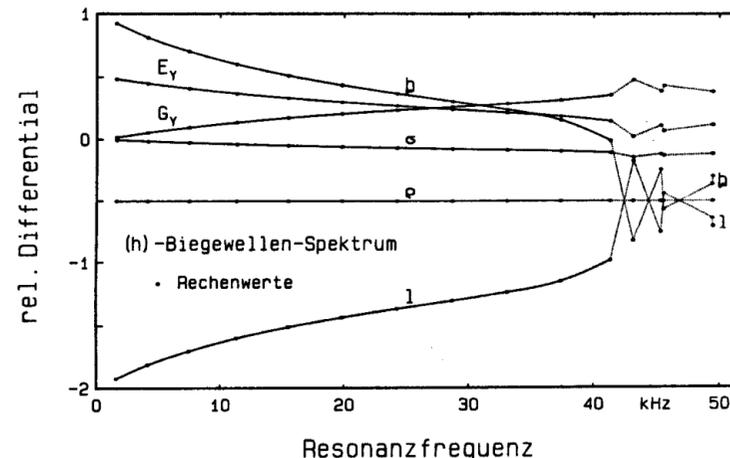


Abb. 3.9 Relative Differentiale der Resonanzfrequenz bezogen auf die relative Änderung von Balkenparametern in Abhängigkeit von der Resonanzfrequenz für das (h)-Biegewellen-Spektrum

Bei dem eingesetzten Rechenverfahren werden die elastischen Eigenschaften des Balkens durch die Moduln vorgegeben. Bei der Berechnung des relativen Differentials der Querkontraktionszahl wird hier der E-Modul festgehalten und die Variation der Querkontraktionszahl durch eine entsprechende Variation des Schubmoduls erreicht.

Anmerkung

Das relative Differential der Querkontraktionszahl wird hier lediglich angeführt, um eine Beurteilung von den Modellvarianten in der Literatur zu erleichtern, bei denen die elastischen Eigenschaften durch das Parameterpaar E-Modul und Querkontraktionszahl gekennzeichnet sind.

Die Betrachtung der relativen Differentiale reicht nicht aus, den weiten Bereich der Variation der Schubsteifigkeit durch TIMOSHENKO-Koeffizienten, die nach Tab. 2.2 von ca. 0,51 bis 1,04 reichen, zu erfassen. Deshalb wird für beide Spektren in den Abbn. 3.10 und 3.11 die relative Resonanzfrequenzänderung bezogen auf die Resonanzfrequenz im Bezugsmodell bei Einführung eines TIMOSHENKO-Koeffizienten in Abhängigkeit von der Resonanzfrequenz gesondert dargestellt. Die Abbildungen dienen gleichzeitig zur Darstellung der relativen Abweichungen der Meßwerte von den Rechenwerten des Bezugsmodells.

Bei der folgenden Diskussion wird zunächst der durch eine gepunktete Verbindung zwischen den Punkten in Abb. 3.9 und 3.11 ausgezeichnete Bereich rein harmonischer Ausbreitung von (h)-Biegewellen ausgenommen. In den Abb. 3.8 und 3.9 ist zu erkennen, daß eine Änderung der Dichte von 1% unabhängig von der Resonanzfrequenz eine Verschiebung von -0,5% bewirkt: die Resonanzfrequenz hängt stets von der Wurzel aus der Dichte ab.

Entgegen den einschränkenden Bemerkungen in der Literatur zeigt das relative Differential der Querkontraktionszahl, daß die Querkontraktionszahl in allen eindimensionalen Biegemodellen nur einen vernachlässigbaren Durchgriff auf die Ergebnisse für die Resonanzfrequenz des Probekalkens hat.

Die Differentiale der Länge und der zur jeweiligen Schwingung gehörenden Profilhöhe h bzw. b zeigen einen mit der Frequenz abnehmenden Einfluß. Diese Kurven erlauben eine Abschätzung der Einwirkung von Meßfehlern in diesen Parametern und mögen zur kontrollierten Verschiebung von Resonanzfrequenzen bei der technischen Auslegung von Wellenleitern dienen. Sie sind nicht geeignet, Modellkorrekturen zu tragen. Hierfür kommen die beiden Moduln der Elastizität als lineare Faktoren in den Balkenparametern Biege- bzw. Schubsteifigkeit infrage.

Die Differentiale der Moduln haben eine entgegengesetzte Frequenzabhängigkeit und es ist zunächst offensichtlich, daß man durch eine phänomenologische, frequenzabhängige Korrektur einen der Moduln jede Abweichung vom Bezugsmodell auffangen kann. In erster Näherung bleiben die Meßwerte linear zunehmend hinter den Rechenwerten im Bezugsmodell zurück. Da eben-

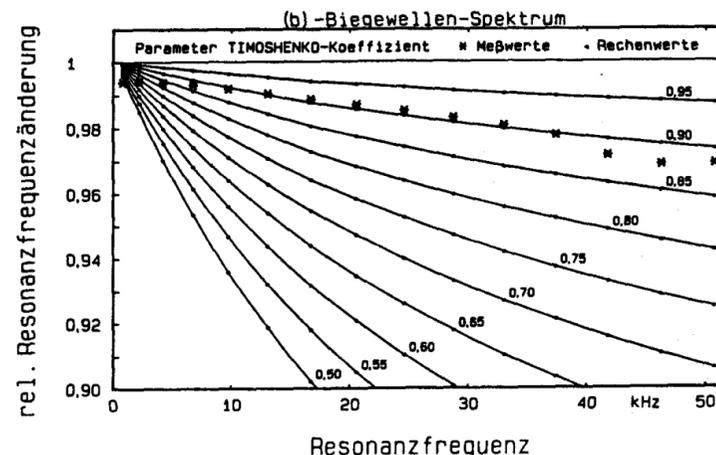


Abb. 3.10 Relative Resonanzfrequenzänderung bei Einführung eines TIMOSHENKO-Koeffizienten in Abhängigkeit von der Resonanzfrequenz für das (b)-Biegewellen-Spektrum

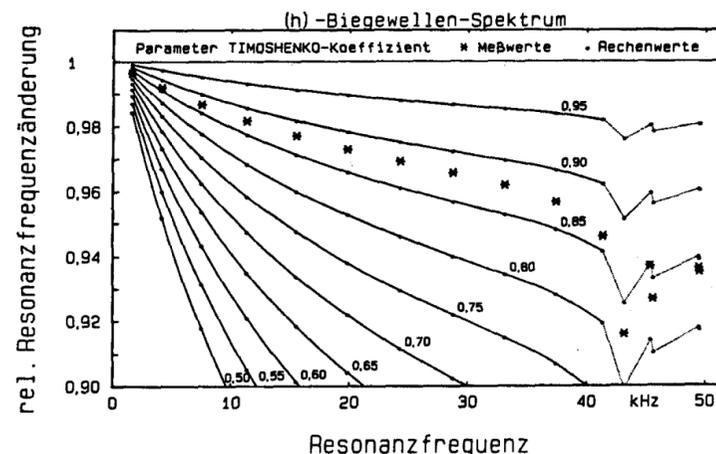


Abb. 3.11 Relative Resonanzfrequenzänderung bei Einführung eines TIMOSHENKO-Koeffizienten in Abhängigkeit von der Resonanzfrequenz für das (h)-Biegewellen-Spektrum

falls das relative Differential des Schubmoduls näherungsweise einen linear anwachsenden, die Resonanzfrequenz erniedrigenden Einfluß zeigt, bietet sich zunächst rein pragmatisch an, die abweichende Tendenz der Meßwerte durch einen einzigen, frequenzunabhängigen Faktor für die Schubsteifigkeit bzw. den Schubmodul zu korrigieren. Unabhängig von der bildhaften oder theoretischen Begründung bietet daher der TIMOSHENKO-Koeffizient, als Faktor beim Schubmodul, den leichtesten korrektiven Ansatz. Es ist in diesem Zusammenhang bemerkenswert, daß ein frequenzabhängiger Ansatz von E, der mit dem Übergang des E-Moduls für Stäbe zum Plattenmodul - also zu einem steiferen Modul - begründet werden könnte, die Tendenz der Meßwerte konterkariert.

Die Abb. 3.10 und 3.11 zeigen für beide Biegewellenspektren des Probalbens die Meßwerte im Parameternetz der TIMOSHENKO-Koeffizienten. Für TIMOSHENKO'sche Modelle, die auch eine Einführung effektiver E-Module zulassen, sind weniger die relativen Abweichungen bedeutsam, die über andere Korrekturen angepaßt werden könnten, als vielmehr die Übereinstimmung der inneren Krümmung des Netzes mit dem Verlauf der Meßwerte.

Für das (h)-Spektrum ergibt sich eine optimale Übereinstimmung eines TIMOSHENKO-Modells mit der Messung im diskutierten Frequenzbereich mit einem Koeffizienten von ca. 0,885. Bei (b)-Biegewellen ist dieser Koeffizient sicher zu klein. Allerdings ist gerade bei den untersten Resonanzfrequenzen der Ansatz eines derartigen Koeffizienten wenig hilfreich. (Es ist an dieser Stelle zu betonen, daß die eingetragenen Meßwerte und damit die uneinheitliche Abweichung von den Modellen auf Messungen beruhen, die mit einer gleichen oder geringeren Unsicherheit belastet sind als die Rechenwerte. Das experimentell gesicherte Verhalten wird offenbar durch diese Modelle nicht gestützt.)

Im mittleren Frequenzbereich führt der Ansatz eines TIMOSHENKO-Koeffizienten zwischen 0,91 und 0,93 zu einer optimalen Anpassung. Für die Abweichungen oberhalb von 40 kHz liegt es nahe, einen Einfluß des (l)-Biegewellenspektrums zu vermuten.

Für das TIMOSHENKO-Modell auf der Basis des E_y würden bei der Bestimmung des Koeffizienten aus den unteren Resonanzfrequenzen viel zu kleine Werte ermittelt werden. Das gilt für das (b)-Spektrum in besonderem Maße. Dies mag vielleicht erklären, daß in der Literatur von experimentellen Bestätigungen sehr kleiner TIMOSHENKO-Koeffizienten berichtet wird.

Aus dem Versuch der Abschätzung eines TIMOSHENKO-Koeffizienten ist für die weitere Diskussion festzuhalten, daß es für beide Spektren keinen einheitlichen optimalen Wert gibt. Da es sich um denselben Balken handelt, kann diese Diskrepanz nicht durch eine Querschnittsabhängigkeit des Koeffizienten erklärt werden.

Im rein harmonischen Bereich von (h)-Biegewellen zeigen die relativen Differentiale insbesondere der Abmessungen interessante Auswirkungen. Einerseits ändert sich allgemein die Abhängigkeit von der Profilhöhe b . Bei größte-

rer Höhe, also bei einer durch den Formparameter vergrößerten Biegesteifigkeit, sinkt die Resonanzfrequenz; bei einer durch eine Erhöhung des E-Moduls vergrößerten Biegesteifigkeit dagegen steigt die Resonanzfrequenz. Andererseits unterscheiden sich die Resonanzfrequenzen nun alternierend durch einen starken Eingriff einer Längenänderung verbunden mit einem schwachen Eingriff der Profilhöhe. Dieses Verhalten weist bereits auf eine andere Ausbreitung von Biegewellen in diesem Bereich.

• Anmerkung

Die relativen Differentiale im oberen Frequenzbereich des (h)-Biegewellen-Spektrums widersprechen damit scheinbar völlig den Bildern von der Biegung und von den Resonanzschwingungen. Die Diskussion und die Beurteilung der damit verbundenen Schnelleprofile wird jedoch zeigen, daß dieses Phänomen auch anschaulich interpretiert werden kann. Es zeigt sich hier, daß scheinbar plausible Bilder stets überprüft und gegebenenfalls durch neue Beobachtungen revidiert werden müssen.

Abb. 3.11 zeigt, daß die TIMOSHENKO-Korrektur auch für diesen Bereich ihre Wirkung behält: qualitativ stimmen die Rechenwerte mit dem Verlauf des Parameternetzes völlig überein.

3.5.2 Schwingungsformen

Die Schnelleverteilung (Schnelleprofil) auf den Seitenflächen des Balkens für die Querschnelle (als Maß für die Durchbiegungsbewegung) und die Tangentialschnelle (als Maß für die Drehbewegung der Querschnitte) stimmt mit dem nach dem Bezugsmodell berechneten Verlauf im Rahmen der Meßgenauigkeit überein. Die Meßunsicherheiten bei der Messung der Schnelleprofile lassen keine Unterscheidung zwischen den Modellen zu, da alle betrachteten Modelle ein qualitativ zu ähnliches Profil prognostizieren. Die Beurteilung der Modelle in bezug auf die gemessenen Schnelleprofile auf den Stirnflächen des Balkens werden weiter unten diskutiert.

Das Verwölbungsbild des Balkens legt nahe, daß in eindimensionalen Modellen der Einfluß der Verwölbung nicht im notwendigem Maß berücksichtigt werden kann. Auch aus diesem Grund wird häufig der Gültigkeitsbereich der eindimensionalen Modelle auf den Bereich beschränkt, wo die reziproke Wellenzahl deutlich größer ist als die Balkenhöhe. Die Aussage der schubelastischen Modelle, daß es oberhalb einer Grenzfrequenz eine zweite ausbreitungsfähige Biegewelle gibt, wird in der Literatur - offensichtlich bis auf eine Ausnahme, s.u. - nicht akzeptiert, sondern nur als mathematische Absonderung von schubelastischen Modellen ohne physikalischen Hintergrund gesehen.

GOENS beispielsweise bezweifelt in /19/ die Existenz dieser Wellen mit einem pauschalen Hinweis auf die Gültigkeitsgrenzen der Modelle. Auch HUANG, /78/, erhält in seinem Modell explizit eine zweite harmonische Lösung, läßt sie dann aber bei weiteren Betrachtungen weg. DOLPH behauptet in seiner Veröffentlichung /79/, diese Lösung sei physikalisch bedeutungslos. HOWE geht

in /80/ davon aus, daß die für diese rein harmonische Ausbreitung erforderlichen Balkenquerschnitte und Frequenzen außerhalb des technisch sinnvollen Bereichs liegen.

Dagegen gelang DOWNS in /42/ - offensichtlich erstmals - der experimentelle Nachweis des Grundmodts dieser Schwingung an einem dafür ausgelegten, an seinen Stirnflächen besonders abgestützten Balken. Er beschreibt den Mod als eindeutig identifiziert. In seiner physikalischen Interpretation weist er allerdings darauf hin, daß eine Balkenlagerung notwendig ist, um das Drehmomentgleichgewicht zu erreichen.

Es wurde schon bei der Diskussion der Resonanzfrequenzen herausgestellt, daß die Messungen eindeutig belegen, daß diese Wellenausbreitung auftritt und daß selbst das schubelastische BERNOULLI-Modell die Resonanzfrequenzen qualitativ richtig voraussagt. Es ist deshalb von besonderem Interesse, die Modellaussagen für die Schnelleprofile mit den Messungen zu vergleichen.

In den Abb. 3.12 bis 3.17 werden den Rechenwerten nach dem Bezugsmodell für die Querschnelle und für die Drehgeschwindigkeit die Schnelleprofile der Normal- und der Tangentialschnelle auf der Mantelfläche des Probekalkens für die Resonanzen im Bereich um und oberhalb der kritischen Frequenz gegenübergestellt. In den Abbildungen zu den Schnelleprofilen wird der Koordinatenursprung abweichend von der Vereinbarung in Abschnitt 2.2.1 in die Mitte des Balkens verlegt, um Symmetriebetrachtungen zu erleichtern.

Der Vergleich der gemessenen Schnelle normal zur Oberfläche mit der Modellkenngröße Querschnelle und der Vergleich der gemessenen Schnelle tangential zur Oberfläche mit der Modellkenngröße Drehgeschwindigkeit zeigt eine unerwartet gute Übereinstimmung.

Diese gute Übereinstimmung ist ein zweites überragendes Argument für die Zuverlässigkeit eindimensionaler Modelle auch für Biegewellen, deren reziproke Wellenlänge deutlich kleiner ist, als der Trägheitsradius des Querschnitts.

Da diese Schwingungsformen bisher in der Literatur nicht diskutiert werden, sollen ihre Eigenschaften kurz beschrieben werden:

Es existieren zwei Biegewellentypen. Sie sind unabhängig voneinander ausbreitungsfähig und haben bei gleicher Frequenz unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten. Lediglich an den beiden Stirnflächen des Balkens muß die Superposition beider Wellentypen die Randbedingung erfüllen. Deshalb ergeben sich als Eigenlösungen Überlagerungen von zwei stehenden Wellen mit unterschiedlicher Ortsfrequenz. Wegen der Kopplung der beiden Wellen an den Stirnflächen bilden sich für beide Wellen keine ganzzahligen Vielfachen der halben Wellenlänge aus. Eine Zuweisung einer Ordnungszahl zum Eigenmod kann sich daher nicht mehr allein auf das Abzählen von Nulldurchgängen des Schnelleprofils stützen.

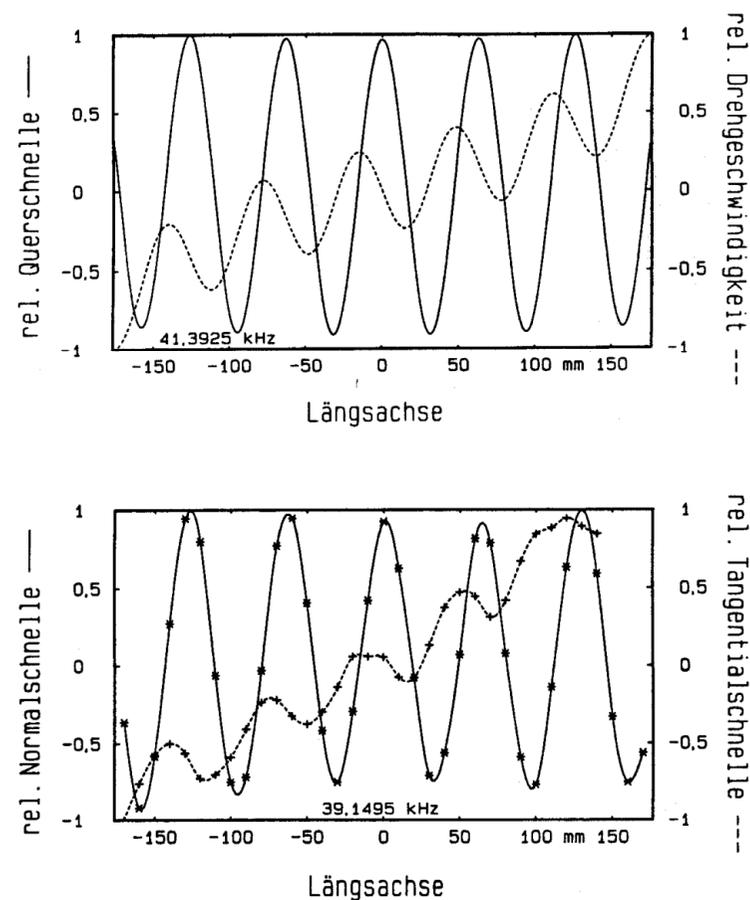


Abb. 3.12 Vergleich der Ortsabhängigkeit der Querschnelle und der Drehgeschwindigkeit (oben) mit dem Schnelleprofil auf der Seitenfläche des Probekalkens (unten) für (h)-Biegeschwingungen.

Die Meßwerte (*) sind mit einer Spline-Funktion 3. Grades verbunden.

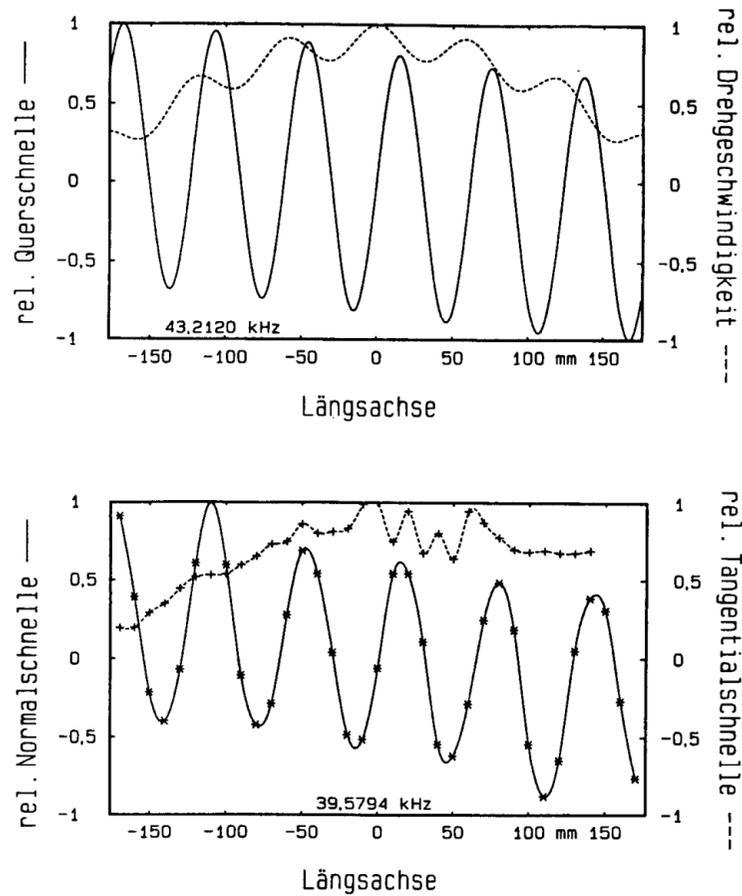


Abb. 3.13 Vergleich der Ortsabhängigkeit der Querschnelle und der Drehgeschwindigkeit (oben) mit dem Schnelleprofil auf der Seitenfläche des Probekalkens (unten) für (h)-Biegeschwingungen. Die Meßwerte (*) sind mit einer Spline-Funktion 3. Grades verbunden.

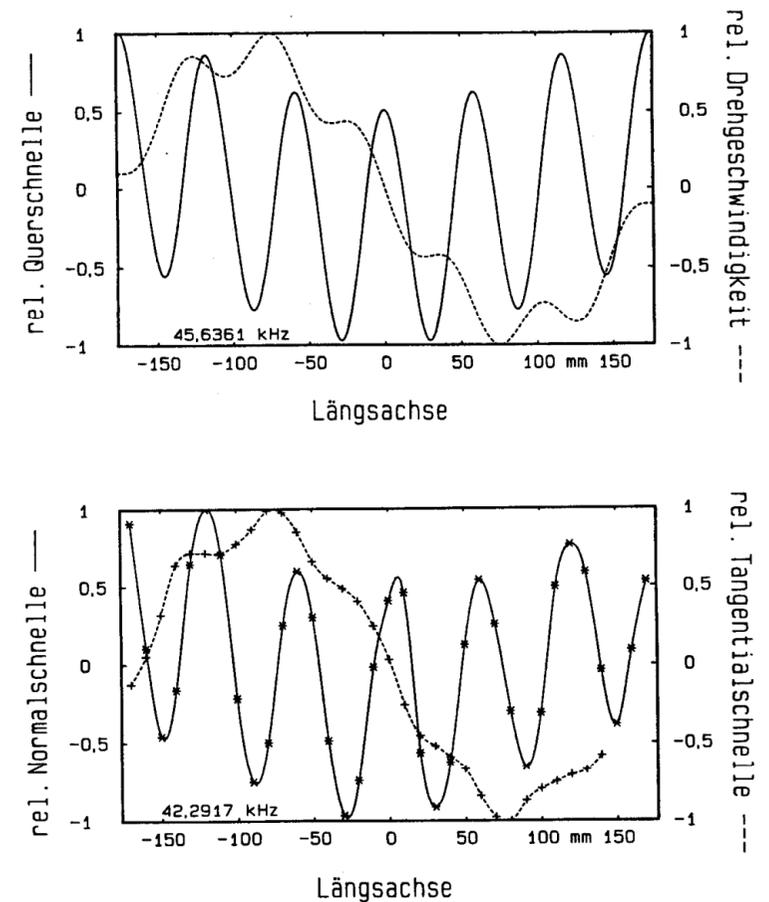


Abb. 3.14 Vergleich der Ortsabhängigkeit der Querschnelle und der Drehgeschwindigkeit (oben) mit dem Schnelleprofil auf der Seitenfläche des Probekalkens (unten) für (h)-Biegeschwingungen. Die Meßwerte (*) sind mit einer Spline-Funktion 3. Grades verbunden.

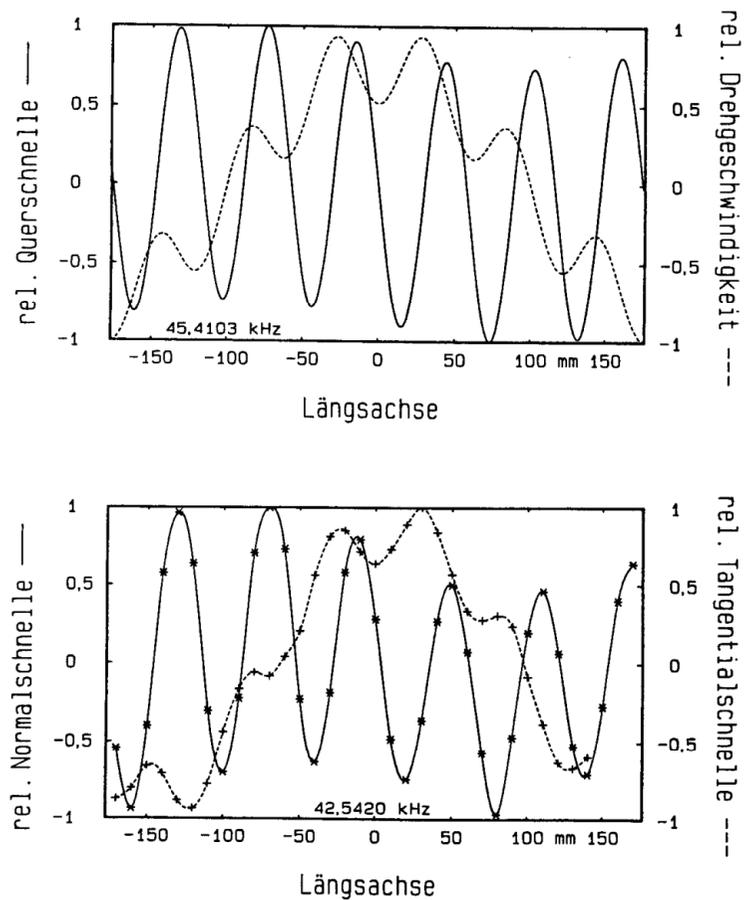


Abb. 3.15 Vergleich der Ortsabhängigkeit der Querschnelle und der Drehgeschwindigkeit (oben) mit dem Schnelleprofil auf der Seitenfläche des Probekbalkens (unten) für (h)-Biegeschwingungen. Die Meßwerte (*) sind mit einer Spline-Funktion 3. Grades verbunden.

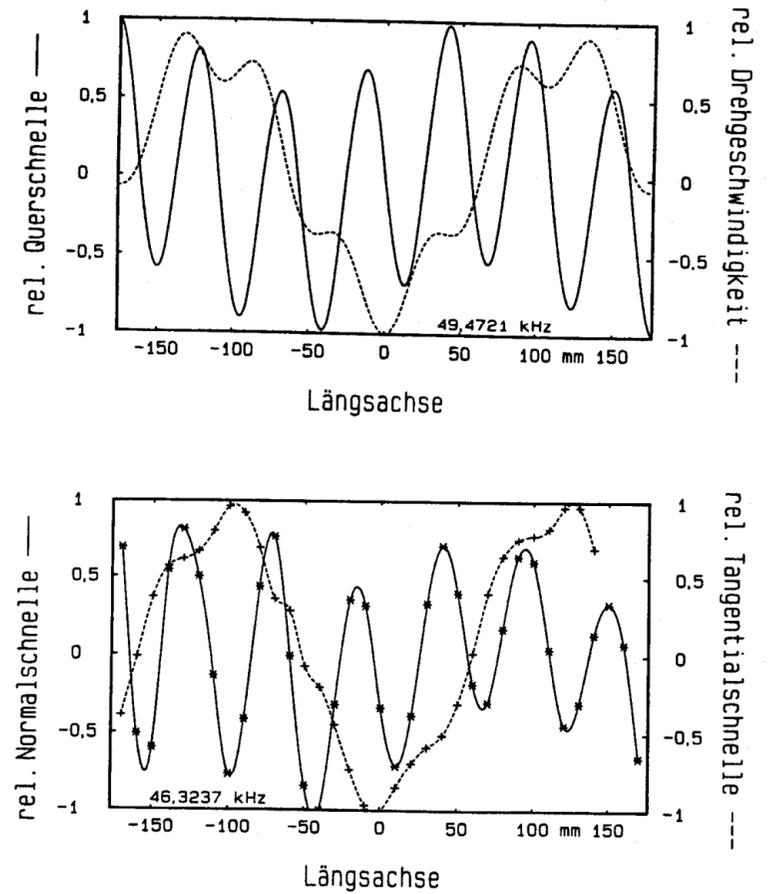


Abb. 3.16 Vergleich der Ortsabhängigkeit der Querschnelle und der Drehgeschwindigkeit (oben) mit dem Schnelleprofil auf der Seitenfläche des Probekbalkens (unten) für (h)-Biegeschwingungen. Die Meßwerte (*) sind mit einer Spline-Funktion 3. Grades verbunden.

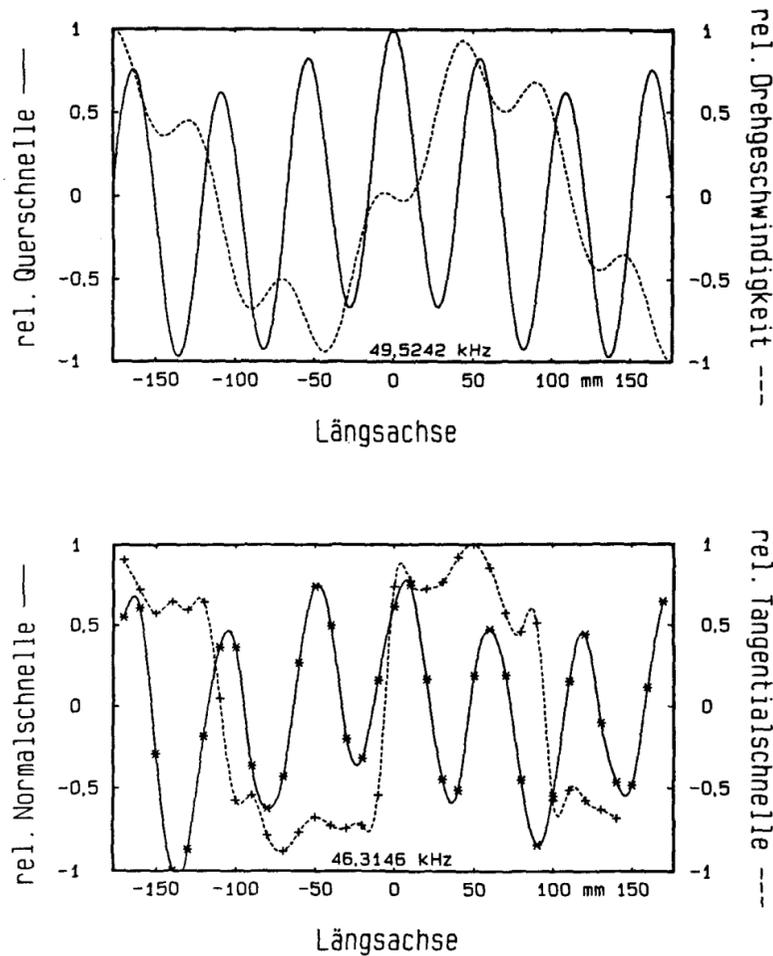


Abb. 3.17 Vergleich der Ortsabhängigkeit der Querschnelle und der Drehgeschwindigkeit (oben) mit dem Schnelleprofil auf der Seitenfläche des Probek balkens (unten) für (h)-Biegeschwingungen. Die Meßwerte (*) sind mit einer Spline-Funktion 3. Grades verbunden.

In den Abb.3.12 bis 3.17 ist sowohl in dem Profil der Normalschnelle als auch in dem Profil der Tangentialschnelle eine Überlagerung einer Komponente mit hoher Ortsfrequenz mit einer Komponente mit niedriger Ortsfrequenz zu beobachten. Die hohe Ortsfrequenz wird von dem immer ausbreitungsfähigen Biegewellentyp erzeugt; die niedrige Ortsfrequenz ist auf den zweiten Biegewellentyp zurückzuführen, der erst oberhalb einer Grenzfrequenz ausbreitungsfähig wird.

Besonders interessant ist der Schwingungsmod in Abb. 3.13, den DOWNS bereits untersucht. Auf der gesamten Seitenfläche des frei schwingenden Probek balkens bildet sich eine konphase Drehgeschwindigkeit (bzw. Tangentialschnelle) aus. Der Drehimpuls, der in dieser Bewegung enthalten ist, wird von der langwelligeren Komponente der Querschnelle gerade kompensiert. Bleibt man bei der Betrachtung des Drehimpulses, der mit beiden Kenngrößen verbunden ist, erhöht sich zu jeder neuen Resonanzschwingung die Anzahl der Nullstellen dieser Drehimpulse. Bei dieser Schwingungsform wird auch anschaulich verständlich, daß die Resonanzfrequenz nicht mehr entscheidend von der Länge des Balkens abhängt und sich das relative Differential der Balkenhöhe sogar umkehrt (vgl. Abb. 3.9).

Der gelungene Nachweis dieser Schwingungen und die gute Übereinstimmung der vorhergesagten und gemessenen Schwingungsformen bei diesen Schwingungen belegen, daß ein eindimensionales Modell für technische Anwendungen in der Ultraschall-Energietechnik qualitativ hinreichend zuverlässig und bei Nutzung eines TIMOSHENKO'schen Modells mit eingemessenen Koeffizienten auch quantitativ hinreichend genau sein wird.

Dennoch ist die Gültigkeit der Modelle einzuschränken. Einen ersten entscheidenden Hinweis auf die Grenzen eines eindimensionalen Modells erhält man durch die Messung der Verteilung der Querschnelle bzw. Drehgeschwindigkeit auf der Stirnseite des Probek balkens bei verschiedenen Resonanzschwingungen im (b)-Spektrum. Diese Profile sind zu vergleichen mit den Bildern, die den Modellen zugrunde liegen. Während in Richtung der Höhenkoordinate die Schnelle konstant ist, ergibt sich in Richtung der Breitenkoordinate bei höheren Ordnungen ein signifikantes Schnelleprofil.

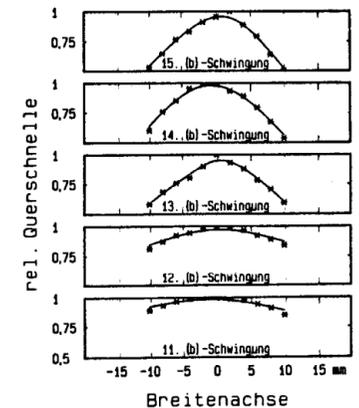


Abb. 3.18 Schnelleprofil auf der Stirnfläche des Probek balkens für das (b)-Biegeschwingen-Spektrum (*) Meßwerte

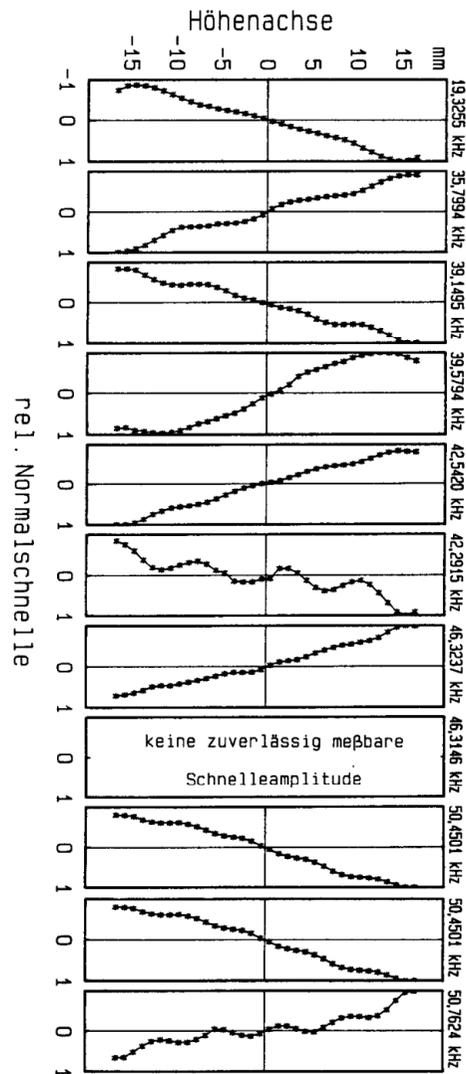


Abb. 3.19 Schnelleprofil auf der Stirnfläche des Probekalkens für (h)-Biegeschwingungen, Meßwerte (*)

Abb. 3.18 zeigt diese Abweichung von den Voraussetzungen der Modelle für 5 Moden des (b)-Biegewellen-Spektrums. Die Durchbiegung auf den Stirnflächen konzentriert sich immer mehr zur Mitte.

Abb. 3.19 zeigt entsprechende Messungen für ausgewählte Schwingungen des (h)-Biegewellen-Spektrums. Aus den Schnelleprofilen ist das Verwölbungsbild bei allen Resonanzen nicht zu bestätigen. Besonders die Schwingungen bei 46,3237 kHz und 50,4501 kHz zeigen wieder ein eigentlich für tiefe Resonanzen typisches, glattes Profil der Normalschnelle, das dem BERNOULLI-Bild entspricht. Die Ausbildungen kurzweiliger Profilkomponenten sind zwar nach der Lösung des verwandten statischen Lastfalles in der Elastizitätstheorie möglich (vgl. Abschnitt 2.4.3.1). Es war nicht zu erwarten, daß hohe Ortsfrequenzen bevorzugt maßgebend sind.

Aus der Diskussion dieser Messungen folgt einerseits, daß der theoretisch physikalische Ansatz TIMOSHENKO's qualitativ richtig ist, die quantitativen Berechnungen des Koeffizienten aber völlig unzulänglich sein können, weil die Voraussetzungen und die Randbedingungen der Durchbiegung und der Neigung bei einer freien Biegeschwingung nicht realisiert sein müssen. Andererseits machen die Ergebnisse noch einmal deutlich, daß Berechnungen mit der Kontinuumstheorie trotz der ihr eigenen hohen Zuverlässigkeit kaum einen Fortschritt darstellen können, wenn man die Randbedingungen der Verschiebungen nicht entsprechend der Realität vorgeben kann. Es würde einen erheblichen Aufwand bedeuten, diese nun gemessenen Profile als Bilder zur Modellbildung bzw. als Randbedingungen in einem Lastfall theoretisch berücksichtigen zu wollen. Entsprechend zurückhaltend sind daher im Hinblick auf eine technische Anwendung in der Ultraschalltechnik mehrdimensionale Modelle zu beurteilen.

3.5.3 Schlußfolgerung

Die Bewertung der eindimensionalen Biegemodelle läßt im Hinblick auf ihre Anwendung in der Ultraschalltechnik folgende zusammenfassende Beurteilung zu:

Die Berücksichtigung der Schubelastizität ist sowohl qualitativ wie quantitativ erforderlich, weil sonst bereits die Rechenergebnisse für die Resonanzfrequenzen nicht zuverlässig genug sind und das prinzipielle Verhalten nicht vollständig erfaßt werden kann.

Für nicht zu breite Balken liefern alle drehträgen und schubelastischen Modelle zumindest Resonanzfrequenzen, die im Hinblick auf die zu fordernde Genauigkeit zufriedenstellende Ergebnisse darstellen.

Bei Verwendung effektiver Balkenparameter, die die Form und den Werkstoff des konzipierten Wellenleiters meßtechnisch berücksichtigen, läßt sich mit angepaßten eindimensionalen Modellen insgesamt eine Zuverlässigkeit in der Beschreibung der Ausbreitung von Biegewellen erreichen, die erwarten läßt, daß auch die sonstigen zu berechnenden Eigenschaften einer für die Leistungsübertragung in der Ultraschall-Energietechnik einsetzbaren Biegewellenleitung genügend genau vorhergesagt werden können

Die in der Literatur dokumentierten, gegenseitig widersprüchlichen Aussagen über den TIMOSHENKO-Koeffizienten (s. Tab. 2.2) zeigen auf, daß TIMOSHENKO-Koeffizienten theoretisch nicht zuverlässig berechnet werden können. Der am Probekörper geführte Nachweis, daß ein einziger T_K für den gesamten Frequenzbereich nicht existiert, unterstreicht diese Feststellung. Dieses Ergebnis bei rechteckigen Balkenquerschnitten legt nahe, daß gerade bei anderen Querschnittsformen auch eine Übernahme quantitativer theoretischer Werte des Koeffizienten zu nicht genügend aussagefähigen Modellen führt. Es ist allerdings zu erwarten, daß sich für alle Querschnittsformen ähnlich befriedigende Aussagen aus eindimensionalen Modellen ableiten lassen.

Für technische Anwendungen ist es sachgerecht, phänomenologische und pragmatische Korrekturen einzuführen, die die quantitative Übereinstimmung zwischen Modell und Messung verbessern. Die Untersuchungen haben gezeigt, daß die Kongruenz solcher Korrekturen mit einer theoretischen Argumentation nicht unbedingt tauglich ist, im Umkehrschluß die Richtigkeit eines Modelles zu bestätigen bzw. die Begründung des Korrektionsansatzes zu beweisen.

4 Rechenmethoden

4.1 Einführung

Im ausgehenden 17. Jahrhundert wurden die ersten analytischen Rechenverfahren entwickelt, um durch eine stringente mathematische Formulierung aus Modellen Voraussagen zu erhalten. Die Möglichkeiten J. BERNOULLIs, aus seinem Balkenmodell Ergebnisse zu erhalten, waren sehr begrenzt; er löste das Biegeproblem geometrisch mit zeichnerischen Mitteln. Er trug EULER sein Biegeproblem mit der Anregung vor, dessen gerade veröffentlichtes Extremalprinzip und die zu dieser Zeit keinesfalls anerkannte Differentialrechnung auf das Biegeproblem anzuwenden. EULER entwickelte auf diese Anregung hin die Theorie der elastischen Linien. In der Folgezeit orientiert sich die Entwicklung der Rechenmethoden für Biegemodelle eng an den Fortschritten der mathematischen Physik.

• Anmerkung

Die Veröffentlichungen zur damaligen Zeit bieten dem heutigen Leser einen interessanten Einblick in die Art und Weise, wie in den Anfängen der modernen Wissenschaften das spielerische Moment in die Behandlung der Fragestellungen einging. BERNOULLI schließt seine Veröffentlichung /81/ mit einer Aufgabe für seine Leser. Er gibt an, daß er diese Lösung gerade gefunden habe, mit ihrer Veröffentlichung aber noch zwei Jahre warten wolle, um seinen Lesern Zeit zu geben, die Lösung selbst zu finden.

Bei Biegeproblemen ist der mathematische Komplikationsgrad so hoch, daß auch mit den heute bekannten Rechenmethoden bisher nur einfachste Fälle exakt gelöst werden konnten. Unabhängig vom Formalismus der Methoden treten bei komplexeren Fällen die gleichen unüberwindlichen mathematischen Schwierigkeiten auf.

Während die Wahl der Rechenmethode keinen Einfluß auf die exakten Lösungen hat, kann bei nähernden Verfahren die prinzipielle Berechnung der Zielgrößen und die Zuverlässigkeit der Ergebnisse entscheidend von der Wahl der Rechenmethode abhängen.

In den letzten Jahren werden an Stelle analytischer Verfahren zunehmend numerische Methoden angestrebt. Die Auswahl der Rechenmethoden hängt dabei entscheidend von der konkreten Problemstellung ab und orientiert sich stets an den Zielen der Berechnung. Eine vollständige analytische Lösung des Problems wird in der Regel nicht mehr angestrebt.

Die üblichen Rechenmethoden können in drei Klassen unterteilt werden: in Energiemethoden, in Methoden der Integration der Schwingungsgleichung und in Methoden mit Übertragungsmatrizen. Zu den Energiemethoden - s. Abschnitt 4.3 - gehört die Familie der RAYLEIGH-Verfahren, erweitert durch die Ansätze von RITZ und GALERKIN. Unter diesen Oberbegriff fallen auch

Methoden finiter Elemente. In der Klasse der Energiemethoden wird die Variationsrechnung auf Ansätze für die potentielle und kinetische Energie des Balkens angewendet. Die Vielzahl der Entwicklungskoeffizienten in den Lösungsansätzen führt in der Regel auf große Gleichungssysteme.

Zur Klasse der Integration der Schwingungsgleichung - s. Abschnitt 4.4 - gehören analytische Lösungsverfahren, Standardverfahren zur numerischen Integration von Differentialgleichungen und die Spline-Interpolationstechniken.

In der Klasse der Methoden mit Übertragungsmatrizen - s. Abschnitt 4.5 - ist zwischen solchen zu unterscheiden, bei denen die Integration der Schwingungsgleichung für ein zylindrisches Balkenstück durchgeführt sein muß, bevor die Matrix formuliert wird, und solchen, bei denen direkt die Matrix für ein differentiell kurzes Balkenstück aufgestellt wird und die Integration in Form einer Produktintegration dieser in diesem Zusammenhang sogenannten 'differentiellen Matrizen' erfolgt, vgl. /6/.

Viele Rechenmethoden sind ursprünglich im Hinblick auf die Berechnung von Statik und Dynamik von Bauwerken, mechanischen Bauelementen und Maschinen entwickelt worden und sind hauptsächlich unter diesen Aspekten in der Literatur beschrieben. Im folgenden sollen die Ansätze der Rechenmethoden unter dem Aspekt des Auffindens stationärer Schwingungslösungen und im Hinblick auf sachgerechte Zielgrößen zur Beschreibung der Wellenleitung diskutiert und beurteilt werden.

In Abschnitt 4.2 werden zunächst die Differentialgleichungen eines TIMOSHENKO'schen Modells für einen konturierten Balken mit ortsabhängigen Balken- und Formparametern vorgestellt. In den Abschnitten 4.3, 4.4 und 4.5 wird jeweils der prinzipielle Lösungsweg der drei Klassen der Rechenmethoden dargelegt, bevor in Abschnitt 4.6 eine Beurteilung erfolgt.

4.2 Differentialgleichungen des Balkenmodells

Ein Balken wird durch die Werkstoffparameter Dichte $\rho(x)$, Elastizitätsmodul $E(x)$ und Schubmodul $G(x)$, und durch die Formparameter Querschnittsfläche $F(x)$ und Flächenträgheitsmoment $I(x)$ an der Stelle x charakterisiert. Wenn alle Parameter über die Länge des Balkens konstant sind, wird der Balken im folgenden homogen sonst inhomogen genannt. Die Biegung des Balkens an der Stelle x und zur Zeit t wird durch die vier Kenngrößen Querkraft $K(x,t)$, Drehmoment $M(x,t)$, Durchbiegung $w(x,t)$ und Drehwinkel $\psi(x,t)$ beschrieben. Es gilt die Vorzeichenkonvention nach Abb. 2.3 in Abschnitt 2.2.1.1.

Für ein Balkenstück lauten die vier gekoppelten Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$K'(x,t) = -\rho(x) F(x) \ddot{w}(x,t) \quad (4.1)$$

$$M'(x,t) = -\rho(x) I(x) \ddot{\psi}(x,t) - K(x,t) \quad (4.2)$$

$$w'(x,t) = -\frac{1}{G(x) F(x)} K(x,t) + \psi(x,t) \quad (4.3)$$

$$\psi'(x,t) = -\frac{1}{E(x) I(x)} M(x,t) \quad (4.4)$$

Anmerkung

In der vorliegenden Arbeit sind die Vorzeichen im Hinblick auf eine Kettenrechnung im Rahmen einer Leitungstheorie festgelegt. Diese Vorzeichenwahl wird in den einschlägigen Lehrbüchern nicht verwendet. Eine allgemein vorherrschende Vorzeichenkonvention existiert in der Literatur nicht, vgl. z.B. [3], [51], [82].

Aus den vier gekoppelten Differentialgleichungen 1. Ordnung können im allgemeinen Fall zwei gekoppelte Differentialgleichungen 2. Ordnung für zwei Kenngrößen formuliert werden; in den Gln. 4.5 und 4.6 sind sie für die kinematischen Kenngrößen angegeben.

$$\rho F \frac{\partial^2}{\partial t^2} w = \frac{\partial}{\partial x} \left[GF \left(\frac{\partial}{\partial x} w - \psi \right) \right] \quad (4.5)$$

$$\rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial}{\partial x} \psi \right) + GF \left(\frac{\partial}{\partial x} w - \psi \right) \quad (4.6)$$

Die übliche Herleitung einer Differentialgleichung 4. Ordnung für eine Kenngröße ist nur unter einschränkenden Bedingungen für die Ortsabhängigkeit der Werkstoff- und Balkenparameter sinnvoll.

Die Gln. 4.5 und 4.6 machen deutlich, daß eine analytische Lösung des Problems nur für ausgewählte Funktionen der Parameter angestrebt werden sollte. Im Rahmen einer flexiblen technischen Anwendung des Modells müssen nähernde Rechenmethoden angewendet werden, die für beliebig inhomogene Balken zu einer Lösung führen.

4.3 Energiemethoden

Im Hinblick auf die Berechnung von Biegeschwingungen des Balkens werden mit Energiemethoden viele Ansätze verfolgt, die in bezug auf Konvergenz, Genauigkeit und Rechenaufwand problemorientiert konkurrieren. Diesen Methoden ist der Gedanke gemeinsam, für die orts- und zeitabhängigen Kenngrößen einfache Funktionen mit zunächst frei wählbaren Koeffizienten in die Ausdrücke für die potentielle und kinetische Energie des Balkens einzusetzen, um dann durch eine bestmögliche Wahl der Koeffizienten die Energieausdrücke unter Berücksichtigung der Randbedingungen zu einem Extremum zu führen.

Bei Anwendung der Energiemethoden ist es stets erforderlich, für den Balken die Ausdrücke für die Energie abzuleiten, in Abhängigkeit von den Randbedingungen eine Funktion oder ein Funktionensystem vorzugeben und ein Verfahren auszuwählen, mit dem die Entwicklungskoeffizienten bestimmt werden. Das Ergebnis ist eine funktions- und verfahrensabhängige optimale Näherung für den Verlauf der Kenngrößen.

Aus der Bedingung, daß bei zeitinvarianten Schwingensystemen die mittlere potentielle gleich der mittleren kinetischen Energie ist, folgt nach RAYLEIGH /12/ eine Bestimmungsgleichung für die Eigenfrequenz des Balkens, wenn man in die Ausdrücke für die Energie die zur Eigenfrequenz gehörende Schwingungsform - den ortsabhängigen Verlauf der Kenngrößen - einsetzt. Die Schwingungsformen sind im allgemeinen nicht bekannt; lediglich ihre Werte an den Orten der Stirnflächen des Balkens werden durch die Randbedingungen festgelegt. Beim Verfahren nach RAYLEIGH wird die Schwingungsform durch eine Funktion angenähert, die wenigstens den Randbedingungen genügt und für die man die Ausdrücke für den räumlichen Mittelwert der Energien über die Balkenlänge analytisch integrieren kann. In der Regel wird die gewählte Funktion die Schwingungsform nicht exakt wiedergeben. Die durch den Ansatz willkürliche vorgegebene Schwingungsform entspricht daher einer Zwangsbedingung für die Schwingung des Balkens, die zu einer zu hohen Eigenfrequenz führen muß. Die freien Koeffizienten der Näherungsfunktion sind daher so zu bestimmen, daß die Eigenfrequenz ein Minimum wird.

Für einen zylindrischen Balken führt das RAYLEIGH-Verfahren schon bei dem Ansatz einer Parabel für die Funktion der Durchbiegung bei einem BERNOULLI'schen Modell zu einer Schätzung für die Eigenfrequenz, die nur weniger als 1% vom exakten Wert in diesem Modell abweicht, s. /12/.

Beim RAYLEIGH-RITZ Verfahren wird die RAYLEIGH'sche Bestimmungsgleichung in eine Eigenwertgleichung für die Eigenfrequenz umgeformt. Als Näherung für die Schwingungsform wird ein Funktionensystem eingesetzt, das die Randbedingungen erfüllt. Mit der Forderung, daß im Optimum der Annäherung durch das gewählte Funktionensystem alle Ableitungen der Eigenwertgleichung nach den Entwicklungskoeffizienten verschwinden müssen, gewinnt man ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten des Funktionensystems.

Mit dem RAYLEIGH-RITZ Verfahren berechnen GAINES und VOLTERRA /83/ die Eigenfrequenzen von einseitig eingespannten Balken mit linear mit der Längskoordinate veränderlicher Kontur - kegelförmige Kragbalken. Sie vergleichen die Ergebnisse dieser Energiemethode für freie Kragbalken mit kreisförmigem und rechteckigem Querschnitt für BERNOULLI'sche und schubelastische BERNOULLI'sche Modelle mit und ohne Berücksichtigung der Drehträge mit den bekannten exakten Lösungen für diesen Balkentyp. Bei ihrer Wahl des Funktionensystems liefert das RAYLEIGH-RITZ Verfahren sehr gute Schätzwerte für die Eigenfrequenzen.

Das Verfahren nach GALERKIN (oder die Methode der gewichteten Residuen) geht ebenfalls von der Eigenwertgleichung und von dem Ansatz eines Funktionensystems aus. Man gewinnt das Gleichungssystem zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten über die folgende Schlußweise: Bei optimaler Anpassung der Koeffizienten muß der nach Einsetzen des Systems in die Eigenwertgleichung übrigbleibende Rest (das Residuum) durch eine Funktion beschrieben werden, die zum angesetzten Funktionensystem orthogonal sein muß, sonst läge für das Funktionensystem keine optimale Anpassung vor. Die Orthogonalitätsbedingung für jede der Funktionen des Funktionensystems mit der Restfunktion liefert jeweils eine Bestimmungsgleichung für den Koeffizienten.

Für physikalische Randwertprobleme ergibt sich häufig das gleiche Gleichungssystem für die Entwicklungskoeffizienten wie beim RAYLEIGH-RITZ Verfahren. Begründungen und Herleitungen der mathematischen Aspekte dieser Methode findet man in /84/ oder in einschlägigen Büchern der mathematischen Physik. Die Anwendung dieser Methode auf Biegeschwingungen von Balken auch mit zeitabhängigen Randbedingungen und äußeren Kräften beschreibt z.B. HERRMANN /85/.

Um mit den oben skizzierten Verfahren höhere Eigenfrequenzen und Schwingungsformen berechnen zu können, werden in Abhängigkeit von der Länge des Balkens im Vergleich zur reziproken Wellenzahl Funktionen bzw. Funktionensysteme immer höherer Ordnung erforderlich. Man kann sich auf einfachere Funktionensysteme beschränken, wenn man den Balken in eine Anzahl finiter Elemente segmentiert, die über Stetigkeitsbedingungen gekoppelt werden. Diese Vorgehensweise eröffnet die Möglichkeit, in jedem der Elemente die Funktionen sachgerecht anzusetzen. Für das in diesem Zusammenhang in der Literatur als 'Methode der finiten Elemente' bezeichnete Verfahren sind formal folgende Schritte durchzuführen, s. z.B. /84/

- (a) Segmentierung des Balkens in eine hinreichende Anzahl finiter Elemente.
- (b) Wahl eines Funktionensystems.
- (c) Berechnung der in den Energieausdrücken benötigten Integrale und Umformung der Ergebnisse in die Abhängigkeit von den Werten am Rande des Elementes.

- (d) Kompilation des Gleichungssystem für den ganzen Balken über die Stetigkeitsbedingungen.
- (e) Lösung des Gleichungssystems unter Berücksichtigung der Randbedingungen.
- (f) Konvergenztest für das gesamte Verfahren durch Wahl einer feineren Segmentierung.

Die Schritte (a) und (d) bis (f) sind bei eindimensionalen Balkenmodellen im Rahmen eines allgemeinen numerischen Rechenverfahrens standardisierbar. Die Schritte (b) und (c) werden von der Wahl des Modells, s. Abschnitt 2.4.2, und von den Zielgrößen der Berechnung bestimmt. In der Literatur werden für die Berechnung von Eigenfrequenzen und Schwingungsformen eine große Anzahl von Beschreibungen von Balkenelementen auf der Basis verschiedener Modelle der Balkenbiegung und mit verschiedenen Ansätzen für die Näherungsfunktionen vorgestellt. Eine Übersicht über die dazu erschienen Arbeiten geben /84/ und /85/.

Die Energiemethoden werden für viele Anwendungsfälle im Hinblick auf die Genauigkeit der Ergebnisse und auf den Rechenaufwand variiert und spezialisiert. Ein optimales Verfahren für den allgemeinen Balken läßt sich der Literatur nicht entnehmen.

Die Zuverlässigkeit und die Genauigkeit der Energiemethoden hängt von der Wahl der Näherungsfunktionen ab. Je besser das gewählte Funktionensystem die tatsächlich vorliegende Schwingungsform approximieren kann, um so genauer sind die mit den Methoden erzielten Ergebnisse. Die Bilder von Balkenschwingungen sind bei konturierten Balken (aber auch die Bilder von Balkenschwingungen einfacher zylindrischer Balken, s. Abb. 3.12 bis 3.17 in Abschnitt 3.5.2 und Abb. 5.4 in Abschnitt 5.6) häufig unvollständig oder falsch. Da die Wahl des Funktionensystems von diesem Bild beeinflusst werden kann, hängen u.U. die Ergebnisse der Energiemethoden von den Bildern ab.

4.4 Integration der Schwingungsgleichung

Die Berücksichtigung der Schubelastizität und der Drehträgheit kompliziert die Integration der Schwingungsgleichung erheblich. Daher soll zunächst nur die Integration im BERNOULLI'schen Modell betrachtet werden. Für den homogenen Balken ergeben sich als Lösungsfunktionen die harmonischen Funktionen mit reellen und imaginären Argumenten.

Zur Darstellung der Gesamtlösung benutzt man häufig die sogenannten RAYLEIGH-Funktionen - Gln. 4.7 - die formal den Vorteil haben, daß sie sukzessive durch Differentiation auseinander hervorgehen.

$$C_R(x) = \frac{1}{2} \left(\cosh q \frac{x}{l} + \cos q \frac{x}{l} \right) \quad (4.7a)$$

$$S_R(x) = \frac{1}{2q} \left(\sinh q \frac{x}{l} + \sin q \frac{x}{l} \right) \quad (4.7b)$$

$$c_R(x) = \frac{1}{2q^2} \left(\cosh q \frac{x}{l} - \cos q \frac{x}{l} \right) \quad (4.7c)$$

$$s_R(x) = \frac{1}{2q^3} \left(\sinh q \frac{x}{l} - \sin q \frac{x}{l} \right) \quad (4.7d)$$

$$q^4 = \omega^2 l^4 \frac{\rho F}{EI} \quad (4.8)$$

In diese allgemeinen Lösungen können die Randbedingungen eingesetzt werden. Für die Wellenzahl der Biegeschwingung q/l ergeben sich vier betragsgleiche - entartete - Lösungen aus Gl. 4.8.

Die Integration der Schwingungsgleichungen für nicht zylindrische Balken hängt von der Kontur und von den Randbedingungen ab. Für kegelförmige Kragbalken mit einfachen Querschnittsformen stammt die erste Lösung offenbar von WRINCH /87/. Sie zeigte, daß als Lösungsfunktionen BESSEL-Funktionen zweiter Art auftreten. Die Berechnung der Eigenfrequenzen bei den einfachen Randbedingungen und die Bestimmung der Orte der Minima und Maxima der Kenngrößen führt auf transzendente Gleichungen, die nur über Näherungsverfahren lösbar sind.

CRANCH und ADLER /88/ geben exakte Lösungen der Differentialgleichungen für Balken mit rechteckigen, kreisförmigen und elliptischen Querschnitten an, deren Kontur über eine Potenzreihe oder über eine Exponentialfunktion vorgegeben ist. Zu dieser Fallklasse gehören viele technisch relevante Balkenkonturen. Die analytischen Bestimmungsgleichungen für die Eigenfrequenz sind schon für freie Balken sehr komplizierte, transzendente Gleichungen.

Die Ergebnisse der analytischen Integration der Differentialgleichungen für einfache Modelle und für Konturfunktionen, die aus mathematischer Sicht auf den Typ der Differentialgleichung zugeschnitten sind, lassen kaum erwarten, daß diese Rechenmethode für allgemeine Balken genutzt werden kann. In Anbetracht der letztlich doch nicht zu umgehenden numerischen Berechnung technischer Zielgrößen und im Hinblick auf die Erfolge der Näherungsverfahren mit Energiemethoden und Matrizenmethoden fehlt auch das Motiv, den Katalog exakter Lösungen zu vervollständigen.

Für schubelastische Modelle mit Berücksichtigung der Drehträgheit ist es ebenfalls möglich, die Differentialgleichungen für homogene Balken durch einen Ansatz mit RAYLEIGH-Funktionen zu lösen. Die Entartung der Lösun-

gen für q/l wird durch die Schubelastizität aufgehoben. Es ergeben sich zwei konjugiert komplexe Parameter für die Ausbreitung von Biegewellen. Eine Zusammenstellung von Lösungen für TIMOSHENKO'sche Modelle mit den Gleichungen für die Eigenfrequenz für die einfachen Randbedingungen gibt HUANG /78/. Die exakten Lösungen sind nicht leicht zu nutzen. Bei Anwendungen auf konkrete Probleme mit allgemeinen Randbedingungen ist so viel Rechenaufwand erforderlich, daß auch für die Fälle, für die exakte Lösungen bekannt sind, Näherungsverfahren eingesetzt und bis heute weiterentwickelt werden, um die Eigenfrequenzen und die technisch wichtigen Orte der Schwingungsextrema zu berechnen.

Für inhomogene Balken ist auch für einen Spezialfall der Kontur eine allgemeine Integration der Differentialgleichungen eines TIMOSHENKO'schen Modells nicht bekannt.

Im Rahmen der numerischen Integration der Differentialgleichungen spielt bei technischen Anwendungen die Spline-Interpolationstechnik zunehmend eine Rolle. Die Vorteile dieser Methode werden ausführlich in /89/ dargestellt.

4.5 Matrixmethoden

Bei den Matrixverfahren werden die Kenngrößen Durchbiegung, Drehwinkel, Querkraft und Drehmoment, die den Biegezustand des Balkens an einem Ort beschreiben, formal zu einem Zustandsvektor zusammengefaßt. Die Zustandsvektoren an verschiedenen Stellen des Balkens hängen dann über Matrizen voneinander ab, deren Elemente die Eigenschaften des Balkens enthalten.

Matrixmethoden, bei denen die Integration der Differentialgleichungen erfolgt sein muß, bevor eine Matrix formuliert wird, werden im folgenden Übertragungsverfahren genannt. Die Matrixmethode, die aus den Differentialgleichungen ohne vorherige Integration Matrizen ableitet, wird Kettenmatrixmethode genannt.

Zur Aufstellung einer Übertragungsmatrix ist aus der analytischen Lösung der Schwingungsgleichung des homogenen Balkens die Umrechnung der dort auftretenden Integrationskonstanten auf Aussagen über die Kenngrößen erforderlich. In BERNOULLI'schen Modellen ergibt sich Gl. 4.9 für den Zusammenhang der Kenngrößen auf der Stirnfläche bei $x=1$ in Abhängigkeit von den Kenngrößen auf der Stirnfläche bei $x=0$.

Die analytische Lösung ist auch für ein TIMOSHENKO'sches Modell bekannt, s. Gl. 5.86 der vorliegenden Arbeit. Die Formulierung in der Form einer Matrixgleichung nach Gl. 4.9 oder auch Gl. 5.86 ist übersichtlich und im Hinblick auf die Beschreibung von Schwingungen zweckmäßig, weil wichtige Zielgrößen wie z.B. die Kenngrößen selbst auftreten, andere Zielgrößen direkt berechenbar sind. Die Bestimmungsgleichungen für die Eigenfrequenz gewinnt man durch Einsetzen der sie bestimmenden Randbedingungen in die Zustandsvektoren am linken und rechten Rand des Balkens; als Bestimmungsgleichungen ergeben sich Funktionen von Unterdeterminanten der Matrix. Da die

$$\begin{bmatrix} W \\ \psi \\ -M \\ K \end{bmatrix}_{x=1} = \begin{bmatrix} C_R & 1S_R & \frac{1^2}{EI} C_R & \frac{1^3}{EI} S_R \\ q^4 \frac{1}{1} S_R & C_R & \frac{1}{EI} S_R & \frac{1^2}{EI} C_R \\ \frac{q^4}{1^4} EI C_R & \frac{q^4}{1} EI S_R & C_R & 1S_R \\ \frac{q^4}{1^3} EI S_R & \frac{q^4}{1^2} EI C_R & q^4 \frac{1}{1} S_R & C_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ \psi \\ -M \\ K \end{bmatrix}_{x=0} \quad (4.9)$$

Übertragungsmatrizen des Balkens die Schwingungen bzw. die Wellenausbreitung bei jeder Frequenz beschreiben, lassen sich auch Übertragungsfunktionen (z.B. generalisierte Impedanzen in Abhängigkeit von der Längenkoordinate, s. Abschnitt 5.2.3.) direkt ableiten.

Diese Rechenmethode bietet an, konturierte Balken durch Segmentierung in kurze, als homogen anzunehmende Balkenstücke zu berechnen. Die Verknüpfung der Balkenstücke erfordert dann lediglich eine sequentielle Multiplikation der Übertragungsmatrizen der Segmente. Analytisch ist dieses Verfahren jedoch kaum einsetzbar. Aus Gl. 4.9 kann man voraussehen, daß die Multiplikation von schon zwei Übertragungsmatrizen mit unterschiedlichen Balkenparametern zu einem kaum mehr verwertbaren Ausdruck führt.

Die numerischen Eigenschaften des Übertragungsverfahrens werden vor allem dadurch geprägt, daß die Elemente der Übertragungsmatrizen aus Summen von Termen gebildet werden, die jeweils wegen ihrer hyperbolischen Terme in den RAYLEIGH-Funktionen dem Betrage nach mit der Länge des Balkenstückes exponentiell anwachsen: bei der Multiplikation der Matrizen sind gegebenenfalls Differenzen großer Zahlen zu bilden. Es kann so zu schlecht konditionierten Matrizen kommen, die die Zuverlässigkeit dieses Verfahrens in Frage stellen können.

Das Übertragungsverfahren wurde in den fünfziger und sechziger Jahren maßgeblich von MARGUERRE et.al. /90/ und /91/, FUHRKE /92/ und PESTEL et.al. /93 untersucht. Dabei wird den numerischen Schwierigkeiten große Aufmerksamkeit geschenkt.

Die mathematischen Methoden zur Überwindung der numerischen Schwierigkeiten werden von MARGUERRE und UHRIG in /90/ gegenübergestellt und beurteilt. Es wird gefolgert, daß weder die von FUHRKE /92/ eingeführte Methode mit Delta-Matrizen noch das von PESTEL und MAHRENHOLTZ /95/ begründete sogenannte 'Reinigungsverfahren' die Probleme bei schlecht konditionierten Systemen letztlich lösen. Die genannten Autoren schlagen vor, in solchen Fällen auf andere Berechnungsverfahren auszuweichen.

- **Anmerkung**

In der Literatur wird häufig eine physikalische Ursache für das Versagen des Übertragungsverfahrens in den Randbedingungen gesucht; dies ist bei der Wellenausbreitung auf Balken nicht der Fall. Die numerischen Schwierigkeiten hängen allein von den Balken- und Formparametern des Balkens ab, in keiner Weise aber von den auferlegten Randbedingungen. Auch die Anzahl der Elemente, in die ein Balken segmentiert wird, bzw. die Anzahl der notwendigen Matrixmultiplikationen spielt nicht die Rolle, wie dies in /95/, /96 und /97/ angedeutet wird, s. dazu Anhang B der vorliegenden Arbeit.

Die Berücksichtigung der inneren Dämpfung des Materials bewirkt keine wesentliche Besserung der numerischen Zuverlässigkeit /94/. (In /94/ tritt ein Schreibfehler auf. In den Gln. 2 und 3 für die beiden Wellenzahlen der Lösungen müssen die Terme unter der zweiten Wurzel addiert und nicht - wie dort ausgedruckt - subtrahiert werden.)

Die Kettenmatrixmethode wird in /6/, /8/ und /94/ vorgestellt. Ausgangspunkt zur Aufstellung der Matrix sind nicht mehr die allgemeinen Lösungen für zylindrische Balkenstücke, sondern direkt die Differentialgleichungen. Die Gln. 4.1 bis 4.4 werden als Differenzgleichungen aufgefaßt, die in Matrixform mit der gleichen Begriffsbildung wie beim Übertragungsverfahren ein differentiell kurzes Balkenstück der Länge dx beschreiben. Die Beschreibung endlich langer Balken wird bei dieser Methode durch Produktintegration der differentiellen Kettenmatrizen erreicht. Die Berechnung der Eigenfrequenzen in Abhängigkeit von beliebigen Randbedingungen führt auf in der Regel schnell konvergierende Iterationsverfahren.

Auch bei diesem Verfahren treten unter den gleichen Umständen wie oben numerische Schwierigkeiten auf, da durch die Multiplikation der differentiellen Kettenmatrizen die hyperbolischen Funktionen numerisch erzeugt werden. Hier ist die Behebung der numerischen Schwierigkeiten erheblich leichter zu beherrschen, denn zur Kettenmatrixmultiplikation werden als mathematische Operationen nur elementare Addition und Multiplikation benötigt, nicht aber die Berechnung transzendenter Funktionen wie bei der Aufstellung der Übertragungsmatrizen. Die numerischen Probleme lassen sich bei diesem Verfahren in den meisten Fällen durch eine Steigerung der Stellenbreite, mit der die Multiplikationen und Additionen durchgeführt werden, lösen. Bei den Abmessungen und Werkstoffen eines Biegewellenleiters in Verbindung mit den in der Ultraschalltechnik üblichen Betriebsfrequenzen sind schlecht konditionierte Matrizen in der Regel nicht zu erwarten.

- **Anmerkung**

Das Kettenmatrixverfahren ist nicht unbedingt langsamer als die Rechnung mit Übertragungsmatrizen. Die Bildung der Elemente der Übertragungsmatrix benötigt bei TIMOSHENKO'schen Modellen eine Rechenzeit, die durchaus vergleichbar ist zur der Rechenzeit einer numerischen Produktintegration der Kettenmatrizen eines in hinreichend viele Elemente segmentierten Balkens.

Untersuchungen auf einem Tischcomputer (cbm 8296) zeigen darüber hinaus, daß bei gleicher Stellenbreite die Erzeugung von Übertragungsmatrizen über die Produktintegration genauere Ergebnisse liefert als die direkte Aufstellung der Matrix nach Gl. 5.86 (s. /94/), da die implementierten Routinen für die harmonischen Funktionen und die Exponentialfunktion in Grenzbereichen Schwächen aufweisen.

4.6 Beurteilung der Rechenmethoden

Die Beurteilung der Rechenmethoden erfolgt wie bei den Modellen im Hinblick auf ihre Tauglichkeit für die Berechnung von Biegewellenleitern in der Ultraschalltechnik. Neben diesen besonderen Kriterien ist die Genauigkeit der Ergebnisse und die Zuverlässigkeit der Verfahren zu berücksichtigen.

Die praxiserichte Berechnung von Biegewellenleitern bedingt eine Rechenmethode, die sich in die Berechnungsmethoden für die anderen Bauelemente eines Ultraschallsystems einbinden läßt. An Biegewellenleiter angeschlossene Bauelemente können Lasten und Wandler oder Wellenleiter eines anderen Wellentyps sein. Diese Bauelemente werden jeweils durch eine frequenzabhängige Impedanz charakterisiert. Diese Angaben ergeben für den Biegewellenleiter Randbedingungen für die Quotienten zwischen Querkraft und Schnelle bzw. Drehmoment und Drehgeschwindigkeit. Es ist daher von der Rechenmethode zu fordern, daß sie die frequenzabhängigen Übertragungseigenschaften des Wellenleiters mit diesen Zielgrößen beschreiben kann.

Es ist im Rahmen der Aufgabenstellung nicht möglich, durch eigene Verifikation die Rechenmethoden zu vergleichen. Vergleiche aus der Vielzahl der Veröffentlichungen zu gewinnen, ist ebenfalls nur in Ausnahmen zuverlässig möglich. Denn Zahlenvergleiche sind nur sinnvoll, wenn sie auf der Grundlage des gleichen Modells (z.B. gleiche Wahl des TIMOSHENKO-Koeffizienten), der gleichen Kontur (z.B. kegelförmiger Kragbalken), bei gleichen Balkenparametern (z.B. gleiche Wahl der Querkontraktionszahl) und unter den gleichen Randbedingungen (z.B. frei-frei) gewonnen wurden. Man findet in der Literatur nur wenige in allen Parametern jeweils passende Zahlenangaben. Es ist daher in den Veröffentlichungen üblich, die Verfahren jeweils mit exakten Ergebnissen für die analytisch lösbaren Fälle zu vergleichen. Dabei erhält der Leser nur selten alle Informationen über das zugrunde gelegte Modell, so daß sich diese Angaben für weitere Vergleiche wenig eignen. Repräsentative Beispiele quantitativer Vergleiche sind in /98/, /99/, /83/, /100/, /101/, /102/, /103/ enthalten.

Es sei hier darauf hingewiesen, daß Vergleiche mit Meßergebnissen bei der reinen Bewertung der Rechenmethode kontraproduktiv sind, da sich die Unzulänglichkeiten des Modells von den Ungenauigkeiten der Rechenmethode nicht trennen lassen.

Allgemein läßt sich aus der Literatur entnehmen, daß wohl alle Verfahren sich so verfeinern lassen, daß sie für die angegebenen Testfälle eine hinreichende Genauigkeit in der Bestimmung der Eigenfrequenz erreichen. Als hinreichend

läßt sich in diesem Zusammenhang eine Genauigkeit bezeichnen, wenn der Restfehler kleiner als die zu erwartende Unsicherheit aus der Modellbildung ist, so daß die Fehler der Rechenmethode insgesamt vernachlässigt werden können.

◦ *Anmerkung*

Die entwickelten Verfahren werden in den meisten Fällen nicht mit dem Ziel eingesetzt, die Schwingung des Bauelementes, der Maschine oder des Bauwerkes mit hoher Genauigkeit zu beschreiben, weil man die Schwingung technisch nutzen möchte. Man nutzt die Berechnung häufig lediglich, um Hinweise darauf zu erhalten, wie das Teil auszulegen ist, um Schwingungen im Betrieb zu unterdrücken. Deshalb steht bei den Verfahren die Eigenfrequenz als Zielgröße im Vordergrund. Hinweise auf die Zuverlässigkeit der Ergebnisse im Hinblick auf die Schwingungsform werden in der Regel nicht gegeben.

Die Zuverlässigkeit ist das zweite Bewertungskriterium zur Beurteilung der Rechenmethoden. Hier ist zwischen den segmentierenden und ganzheitlichen Verfahren zu unterscheiden. Bei den RAYLEIGH-RITZ-Verfahren, die systemimmanent stets obere Grenzwerte der Eigenfrequenzen liefern, sind ergänzende Methoden entwickelt worden, die gerade stets niedrigere Grenzwerte liefern /83/, so daß hier die Zuverlässigkeit kontrolliert werden kann. Bei den Finite-Elemente-Methoden und der Spline-Interpolationstechnik liefern Konvergenztests einen genügend sicheren Aufschluß über die Signifikanz der Ergebnisse. Alle Verfahren, über die in der Literatur berichtet wird, bestehen diesen Test; es werden allerdings daraus Aussagen über die notwendige Feinheit der Segmentierung gewonnen.

Bei den Übertragungs- und beim Kettenmatrixverfahren ist die Zuverlässigkeit besonders kritisch. Der dort übliche Selbsttest über das Reziprozitätstheorem führt, wenn er in der einfachen Form (Determinante der Matrizen = 1) positiv ausfällt, zur sicheren Aussage, daß die Ergebnisse zuverlässig sind. Der Umkehrschluß ist weniger sicher. Aber auch bei diesen Methoden sind Konvergenzuntersuchungen im Übergang von grober zu feiner Segmentierung durchführbar.

Die Anforderungen an die Rechenmethode von seiten der Ultraschalltechnik können prinzipiell von allen Methoden erfüllt werden. Alle Methoden bis auf das Übertragungs- und das Kettenmatrixverfahren weisen aber strukturelle Probleme auf. Zunächst ist es nicht das primäre Ziel dieser Verfahren, im obigen Sinne Ortskurven von 'Impedanzen' zu liefern; ihre vordergründige Zielgröße ist die Eigenfrequenz. Weiterhin ist man bei diesen Systemen in der Regel auf große fremde Programmpakete angewiesen, die die praktische Implementierung in numerische Verfahren zur Auslegung von Systemen der Ultraschalltechnik sehr erschweren. (Iterative Optimierungen von Biegewellenleitern erfordern bei diesen Methoden jeweils einen neuen Rechengang mit der stets notwendigen Lösung großer Gleichungssysteme. Die dafür notwendigen Rechner sind bei den Anwendern in der Regel nicht vorhanden.)

Im Gegensatz dazu bietet das Übertragungsverfahren und insbesondere das Kettenmatrixverfahren in dieser Beziehung Vorteile. Bei Vorgabe einer Betriebsfrequenz sind ihre Zielgrößen gerade die technisch interessanten Parameter, die ohne Iterationen vorliegen. Als numerische Verfahren sind sie sehr übersichtlich formulierbar und leicht auch für kleinere Rechenanlagen aufzubereiten.

Weiterhin erlauben diese Methoden eine Formulierung in Anlehnung an die Sprache der Vieltortheorie und eignen sich von daher sehr gut für eine Implementierung in eine übergreifende Rechenmethode zur Auslegung akustischer und elektroakustischer Bauelemente. Die notwendige Theorie zur Einbeziehung des Biegewellenleiters in eine akustische Leitungstheorie wird in Kap.5 vorgestellt.

Die Methode der Wahl zur Berechnung von Biegewellenleitern in der Ultraschalltechnik ist daher die Methode der Übertragungs- bzw. der Kettenmatrizen. Ihr ist gerade wegen der letzten Argumente der Vorzug zu geben. Die Nähe zur physikalischen Formulierung der differentiellen Zusammenhänge erlaubt die Anpassung des zugrunde gelegten Modells auf den Spezialfall. Das Verfahren bleibt in jeder Rechenphase physikalisch interpretierbar und erzeugt die Schwingungsformen numerisch ohne den Umweg über nähernde Funktionen, die mögliche physikalische Zusammenhänge verdecken können. Die numerischen Probleme treten bei technisch relevanten Biegewellenleitern in der Regel nicht auf bzw. können durch eine Steigerung der Rechengenauigkeit überwunden werden.

5 Theorie gekoppelter Leitungspaare

5.1 Einführung

Die vorangegangenen Betrachtungen haben gezeigt, daß Biegewellenleiter mit ausreichender Zuverlässigkeit durch eindimensionale Modelle beschrieben werden können. Im folgenden wird ein solches Modell vorausgesetzt. Die Betrachtungen werden auf zeitinvariante Probleme beschränkt. Die Kenngrößen des Modells können daher durch FOURIER-Transformation in zeitunabhängige Klemmengrößen überführt werden.

In der elektrischen Netzwerktheorie werden Leitungen im Rahmen der Vierpoltheorie behandelt: das Klemmengrößenpaar Spannung und Stromstärke am Ein- und Ausgang eines Leitungsstücks wird mit Hilfe von Übertragungsmatrizen verknüpft. Akustische Leitungen lassen sich als Komponenten akustischer Systeme wie elektrische Leitungen als Komponenten elektrischer Systeme beschreiben. Ein Dehnwellenleiter z.B. wird in gleicher Weise behandelt wie ein elektrischer Wellenleiter: An die Stelle des Klemmengrößenpaares Spannung und Stromstärke tritt das Paar Kraft und Schnelle.

Der Biegewellenleiter unterscheidet sich grundsätzlich vom Dehnwellenleiter. Er weist vier statt zwei Leitungskenngößen auf, die paarweise einen anderen physikalischen Charakter haben; Querkraft und Querschnelle sind Komponenten polarer Vektoren, während Drehmoment und Drehgeschwindigkeit Komponenten axialer Vektoren darstellen.

Hinsichtlich des Energieflusses können Biegewellen als miteinander gekoppelte Scher- und Drehwellenanteile aufgefaßt werden, weil an jedem Ort der Biegewellenleitung Leistungen nur über die Kenngrößen Querkraft und Querschnelle einerseits bzw. Drehmoment und Drehgeschwindigkeit andererseits übertragen werden. Deshalb können diese Kenngrößen jeweils zu einem Klemmengrößenpaar zusammengefaßt und als Tore einer Scher- bzw. einer Drehwelle interpretiert werden. Zur Beschreibung von Biegewellenleitern ist daher eine Theorie gekoppelter Leitungspaare erforderlich.

Um den Biegewellenleiter anwendungsorientiert zu beschreiben, ist es notwendig, die Theorie gekoppelter Leitungspaare in Anlehnung an die Methoden kompatibel zu formulieren, die bei der Berechnung anderer akustischer Leitungen und Bauelemente bereits angewendet werden. Deshalb knüpft die hier vorgestellte Theorie an die Übertragungsmatrix- bzw. Kettenmatrixmethode im Rahmen einer Vieltordarstellung an.

Die Theorie wird ansatzweise so weit entwickelt, daß die wichtigen Aussagen über Leitungsphänomene abgeleitet werden können. Dazu gehören die prinzipiellen Eigenschaften der Wellenübertragung, der Leistungstransport und die Beschreibung des Verhaltens der Wellen an Grenzflächen als Grundlage der

Berechnung inhomogener Leitungen. Besonderer Wert wird dabei auf die Berücksichtigung der formalen Kompatibilität zur Beschreibungsweise einfacher Wellenleiter im Rahmen einer akustischen Vieltortheorie gelegt.

Zunächst werden die besonderen Eigenschaften der Klasse der Leitungen in der Familie allgemeiner akustischer Vieltore dargelegt und eine Methode zur Darstellung der Wellenausbreitung, d.h. des Reflexions- und Transmissionsverhaltens und des Energietransportes vorgestellt. Bevor mit der Theorie der Biegewellenleiter beschrieben wird, wird sie methodisch auf das einfache Beispiel des Dehnwellenleiters angewendet.

5.2 Zur akustischen Vieltortheorie

5.2.1 Tore und Klemmengrößen eines Vieltores

Es wird vorausgesetzt, daß die betrachteten akustischen Systeme Leistung nur an Toren übertragen, an denen jeweils zwei Klemmengrößen auftreten, die als Observable gemessen werden können. Die beteiligten Tore können unterschiedlichen Charakter aufweisen. Ihre Klemmengrößen können in verschiedenen, unterschiedlich dimensionsbehafteten Koordinatensystemen gemessen werden. Da die Energie und damit in zeitinvarianten Systemen auch der Energiefluß, also die Leistung, als physikalische Invariante gebildet werden muß, ist weiterhin zu fordern, daß das Skalarprodukt im Koordinatensystem der jeweiligen Klemmengrößen ein Maß für den Energiefluß am jeweiligen Tor ist. Die Klemmengrößen sollen daher in einem leistungsbezogen kontragredienten Koordinatensystem gemessen werden.

Durch diese Forderung wird erreicht, daß die an den unterschiedlichen, z.B. an elektrischen, akustischen oder mechanischen Toren ermittelten Leistungen direkt vergleichbar sind. Sie schließt ein, daß die zur Leistungsberechnung erforderliche Produktbildung zwischen ko- und kontragredienten Komponenten der Klemmengrößen in ihrem jeweiligen Koordinatensystem zu erfolgen hat.

• **Anmerkung**

Das Begriffspaar *ko- und kontragredient* sind veraltete Bezeichnungen für das heute übliche Begriffspaar *ko- und kontravariant*. In der Physik ist es üblich geworden, das System der Verschiebungen als *kontravariantes* zu bezeichnen; die Kräfte werden in der Regel *kovariant* dargestellt (vgl. /108/). Im Rahmen der Theorie gekoppelter Leitungspaare ist es erforderlich, zueinander reziproke Basissysteme in einem Vektorraum zu kennzeichnen, dessen Vektoren gleichermaßen kinematische und dynamische Komponenten als Elemente enthalten, also *gemischtvariant* sind. Deshalb wird in der vorliegenden Arbeit das Begriffspaar *ko- und kontragredient* verwendet.

Zur Erläuterung der Begriffe *ko- und kontragredient* soll einführend das Skalarprodukt zweier Vektoren r_1 und r_2 in einem allgemeinen n -dimensionalen Bezugssystem $(e_1, e_2, \dots, e_k, \dots, e_n)$ betrachtet werden, s. z.B. /104/. Für die Entwicklung der beiden Vektoren nach dieser Basis erhält man

$$r_1 = \sum_{k=1}^m (r_1 e_k) e_k \quad r_2 = \sum_{k=1}^m (r_2 e_k) e_k \quad (5.1)$$

Multipliziert man die Vektoren in dieser Entwicklung skalar miteinander, ergibt sich

$$r_1 r_2 = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m (r_1 e_k) (r_2 e_l) e_k e_l \quad (5.2)$$

Es ist offensichtlich, daß dieses Produkt nur dann unabhängig vom gewählten Bezugssystem ist, wenn das Bezugssystem selbst eine orthonormierte Basis ist, d.h., daß das skalare Produkt jedes Basisvektors mit sich selbst gerade die Einheit ergibt und das Produkt zweier verschiedener Basisvektoren verschwindet. Die Bedingung lautet mit dem KRONECKER-Symbol

$$e_k e_l = \delta_{kl} \quad (5.3)$$

In einem allgemeinen nicht orthogonalen und nicht normierten Bezugssystem wird das Produkt zweier Vektoren nur dann unabhängig vom Bezugssystem, wenn einer der beiden Vektoren auf diese Basis, die im folgenden als *kogrediente* Basis mit hochgestellten Indizes geschrieben wird $(e^1, e^2, \dots, e^k, \dots, e^n)$, bezogen ist und der andere Vektor in Bezug auf eine zu dieser Basis *dualen* oder *reziproken* Basis, die im folgenden als *kontragrediente* Basis mit tiefgestellten Indizes geschrieben wird $(e_1, e_2, \dots, e_k, \dots, e_n)$, entwickelt wird. Zwischen den kogredienten und kontragredienten Basisvektoren gelten die sie wechselseitig definierenden n Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen

$$e_k e^l = \delta_k^l \quad (5.4)$$

Die den Gln. 5.1 entsprechenden Entwicklungen der Vektoren lauten dann

$$r_1 = \sum_{k=1}^m (r_1 e_k) e^k = \sum_{k=1}^m r_{1k} e^k \quad r_1 = \sum_{k=1}^m (r_1 e^k) e_k = \sum_{k=1}^m r_1^k e_k \quad (5.5)$$

$$r_2 = \sum_{k=1}^m (r_2 e_k) e^k = \sum_{k=1}^m r_{2k} e^k \quad r_2 = \sum_{k=1}^m (r_2 e^k) e_k = \sum_{k=1}^m r_2^k e_k$$

Als ein vom Bezugssystem unabhängiges Skalarprodukt ist die skalare Multiplikation eines kogredient und eines kontragredient entwickelten Vektors nach Gl. 5.6 zu definieren.

$$r_1 r_2 = \left[\sum_{k=1}^m (r_1 e_k) e^k \right] \left[\sum_{k=1}^m (r_2 e^k) e_k \right] = \sum_{k=1}^m r_{1k} r_2^k \quad (5.6)$$

Man bezeichnet die Basissysteme e_i und e^i als zueinander reziprok oder kontragredient. Ist das Bezugssystem selbst eine orthonormierte Basis, ist die dazu kontragrediente Basis gerade deckungsgleich. Ist das kogrediente Bezugssystem dimensionsbehaftet, so hat das kontragrediente Bezugssystem gerade die reziproken Dimensionen.

Für die Leistung gelte zunächst die Konvention, daß das Vorzeichen des Energieflusses für alle Tore dasselbe ist, wenn der Energiefluß an den Toren in das System hineingerichtet ist.

Aus dem Erhaltungssatz der Energie folgt, daß bei Zeitumkehr das Meßergebnis für den Energiefluß sein Vorzeichen umkehrt. Das hat Konsequenzen für das Klemmengrößenpaar eines jeden Tores: Bei Zeitumkehr kehrt eine und nur eine der beiden Klemmengrößen ihr Vorzeichen um /105/. Für die systematische Beschreibung der Vieltore erweist sich diese Unterscheidungsmöglichkeit so definierter Klemmengrößen als nützlich.

5.2.2 Zum Gleichungssystem des Vieltores

Das Übertragungsverhalten zwischen den n Toren eines n -Tores wird durch n lineare Gleichungen beschrieben. Die Gleichungen können unter vielerlei Aspekten zu einem Gleichungssystem zusammengefaßt werden. Für eine systematische Behandlung des Gleichungssystems ist es einerseits erforderlich, die Klemmengrößenpaare nach Toren zu ordnen. Andererseits ist auch die Reihung der Klemmengrößen an jedem einzelnen Tor nach einem gleichen, vom Betrachter und vom Problem unabhängigen Kriterium vorzunehmen. Die Betrachtung des Verhaltens der Klemmengrößen bei Zeitumkehr liefert im Gegensatz zur Anwendung von Analogien genau dieses Kriterium.

• **Anmerkung**

Bei einfachen elektroakustischen Wandlern liegt in vielen Fällen ein Zweitor vor, das das elektrische Paar Spannung und Stromstärke mit dem akustischen Paar Kraft und Schnelle verbindet. Zur Reihung der Klemmengrößen legt man je nach Anwendungsfall die sogenannte elektroakustische Analogie I. Art -Spannung entspricht Kraft, Stromstärke entspricht Schnelle- oder die Analogie II. Art mit gerade umgekehrter Zuordnung zugrunde. Dann werden Aussagen z.B. zur Reziprozität des Systems abhängig von der Beschreibung und sind keine objektiven Aussagen über das System. Eine Reihung der Klemmengrößen nach dem Kriterium der Zeitumkehr ist für jedes Paar eindeutig und führt bei Systemen mit mehreren unterschiedlichen Klemmengrößenpaaren nicht zu dem Problem, Analogien einführen und begründen zu müssen. Das gilt auch für den Biegeschwinger, bei dem Analogien zwischen Querkraft und Drehmoment, Querschnelle und Drehgeschwindigkeit oder Querkraft und Drehgeschwindigkeit, Querschnelle und Drehmoment möglich wären.

Das Gleichungssystem eines Vieltores läßt sich allgemein in die Form nach Gl. 5.7 bringen.

In Gl. 5.7 ist \underline{C} eine allgemeine $n \times 2n$ Koeffizientenmatrix; mit X sind die bei der Zeitumkehr vorzeichenhaltenden Klemmengrößen und mit Y die bei

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & C_{12n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & C_{22n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & C_{n2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = 0 \quad (5.7)$$

Zeitumkehr vorzeichenwechselnden Klemmengrößen bezeichnet.

Die Form von Gl. 5.7 ist eine der möglichen, im obigen Sinne nach Toren und Klemmengrößen geordnete Darstellung des Gleichungssystems. Abgesehen von einer anderen Reihenfolge der Tore ist sie gleichzeitig die einzige Form des Gleichungssystems, die unabhängig von besonderen Systemeigenschaften, die z.B. Nullelemente in \underline{C} ergeben können, stets erreicht werden kann. Deshalb ist Gl. 5.7 Ausgangspunkt der Betrachtungen.

5.2.3 Generalisierte Impedanz-, Admittanz- und Kettenmatrix

Häufig ist es möglich, das Gleichungssystem des n -Tores in andere, der analytischen Rechnung zugänglichere Formen zu bringen. Eine besondere Form ist Gl. 5.8

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} = \underline{\underline{Z}} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Die Matrix \underline{Z} wird hier als generalisierte Impedanzmatrix bezeichnet. \underline{Z} ist eine quadratische Matrix vom Range n ; in ihrer Hauptdiagonalen treten tor-spezifische Impedanzen, Z_{kk} , sonst generalisierte Impedanzen, Z_{ki} , als Koeffizienten auf.

Unter entsprechenden Voraussetzungen für das Gleichungssystem läßt sich mit analoger Begriffsbildung eine generalisierte Admittanzmatrix ableiten. Sind die Determinanten der Matrizen ungleich null, sind sie invers zueinander.

Die Ableitung einer Kettenmatrix stellt höhere Anforderungen an das Gleichungssystem. Gl. 5.7 muß so separiert werden können, daß auf beiden Seiten der Gleichung einander entsprechende Tore aufgereiht sind. Dies ist prinzipiell nur bei einer geraden Torzahl möglich. In der Familie der allgemeinen Vieltore erfüllen Leitungsstücke gerade diese Bedingungen, weil sich die Tore der Leitung an einem Ort x_1 stets in Abhängigkeit von den entsprechenden Toren am Ort x_2 der Leitung separieren lassen müssen. Ordnet man das Gleichungssystem auf beiden Seiten nach Toren und Klemmengrößen, stehen sich jeweils gleichartige Tore gegenüber. Die Koeffizienten des Gleichungssystems bilden dann eine generalisierte Kettenmatrix \underline{A} .

$$\begin{bmatrix} X_1(x_2) \\ Y_1(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n(x_2) \\ Y_n(x_2) \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} X_1(x_1) \\ Y_1(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n(x_1) \\ Y_n(x_1) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

\underline{A} ist stets eine quadratische Matrix von geradem Rang; in ihrer Hauptdiagonalen treten dimensionslose Transformationsfaktoren, sonst schachbrettartig alternierend generalisierte Impedanzen und Admittanzen als Komponenten auf.

Wie in der Vierpoltheorie wird für die Kettenmatrixform des Gleichungssystems eine andere Vorzeichenkonvention des Energieflusses vereinbart: das Vorzeichen des Energieflusses soll an allen Toren das gleiche sein, wenn die Energie in die gleiche Richtung bezogen auf die Längskoordinate fließt.

5.2.4 Reziprozitätstest des Gleichungssystems

Die Reziprozität eines Vieltors, die bei vielen physikalischen Systemen, auch bei Biegewellenleitungen, aus allgemeinen Betrachtungen abgeleitet werden kann, s. /66/, hat wichtige Konsequenzen für das Gleichungssystem. Deshalb soll an dieser Stelle ein Verfahren angegeben werden, das es auch bei Vieltoren mit unterschiedlichen Klemmengrößenpaaren gestattet, diese Eigenschaft formal nachzuprüfen. Dieser Test muß im Ansatz unabhängig von der Form des Gleichungssystems sein.

Den Zweitoren wird die Eigenschaft der Reziprozität zugeschrieben, wenn die Zweitormatrizen bestimmten formalen Kriterien genügen: Unter Beachtung der bei den jeweiligen Darstellungen verabredeten Vorzeichenkonventionen für den Energiefluß müssen die Impedanz- und die Admittanzmatrix symmetrisch sein, der Quotient der Nebendiagonalelemente bei den Hybridmatrizen -1 ergeben; die Kettenmatrix muß die Bedingung $\det(\mathbf{A}) = 1$ erfüllen.

Die Reziprozität von allgemeinen Vieltoren läßt sich schrittweise auf die Reziprozität von Zweitoren zurückführen. Für die Entscheidung, ob die Übertragung zwischen zwei ausgewählten Toren eines Vieltors reziprok ist, ist es erforderlich, für die verbleibenden Tore beliebige lineare Zusammenhänge zwischen den jeweiligen Klemmengrößen vorzugeben; d.h., das Tor ist mit einer beliebigen torspezifischen Impedanz abzuschließen: Dann läßt sich das Gleichungssystem des Vieltors stets auf eine Zweitormatrix reduzieren, die nach den oben aufgeführten Kriterien auf Reziprozität untersucht werden kann.

Ein Vieltor soll dann als reziprok bezeichnet werden, wenn es nicht möglich ist, eine Zweitorenpaarung aufzufinden, bei der die Reziprozität verletzt ist.

Jeder Einzeltest aus der Permutation aller möglichen Torkombinationen liefert eine Bedingung für die Reziprozität des Gesamtsystems. Ein reziprokes n-Tor hat daher $n(n-1)/2$ Reziprozitätsbedingungen zu erfüllen. Diese Bedingungen schränken die Anzahl der unabhängigen Koeffizienten des Gleichungssystems ein.

Durch Anwendung des oben formulierten Reziprozitätskriteriums für Vieltore läßt sich zeigen, daß die Reziprozitätsbedingungen in eine Aussage über die Impedanzmatrix \mathbf{Z} oder die Admittanzmatrix \mathbf{G} zusammengefaßt werden können: Läßt sich aus dem Gleichungssystem eines n-Tores eine generalisierte Impedanz- oder Admittanzmatrix ableiten, liegt dann und nur dann Reziprozität vor, wenn diese Matrix symmetrisch ist.

5.3 Zustandsraum von Leitungswellen

5.3.1 Zustandsvektoren und lineare Abbildung

Für die Beschreibung von Leitungen ist es vorteilhaft, das Gleichungssystem in die Kettenmatrixform nach Gl. 5.9 zu bringen (s.o.). Mit der formalen Zusammenfassung der Koeffizienten des Gleichungssystems zu einer Kettenmatrix ist formal die Zusammenfassung der geordneten Klemmengrößen zu einem Vektor verbunden. Dieser Vektor beschreibt bei Leitungen, auf die nun die Betrachtungen beschränkt werden, den Zustand der Leitung an einer Stelle x . Die Komponenten dieser Zustandsvektoren sind unterschiedliche, verschiedene dimensionale Klemmengrößen, die durch das System miteinander verknüpft sind. Alle möglichen Zustände, d.h. alle möglichen Meßergebnisse auf einer Leitung können durch einen solchen Zustandsvektor als Punkt in einem n-dimensionalen Zustandsraum eindeutig gekennzeichnet werden.

Es wird sich im Sinne der Übersichtlichkeit als vorteilhaft erweisen, die Vektoren in diesem Raum in der sogenannten 'braket'-Schreibweise zu notieren. Es wird vereinbart, daß der Vektor \mathbf{r} als ket-Vektor $|r\rangle$ einen kogredienten Vektor bezeichnet. Entsprechend ist der bra-Vektor $\langle r|$ der kontragrediente Vektor zu \mathbf{r} . Als Skalarprodukt zwischen den Vektoren \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 ist in dieser Schreibweise das Formelzeichen $\langle r_1|r_2\rangle$ definiert, während die Reihung $|r_1\rangle \langle r_2|$ als dyadisches Produkt der Vektoren einen Operator in diesem Vektorraum darstellt.

Die Definitionsgleichung der Kettenmatrix, Gl. 5.9, stellt im Zustandsraum eine lineare Abbildung dar: sie bildet den Zustandsvektor $\mathbf{h}(x_1)$ am Ausgang der Leitung über die in der Kettenmatrix enthaltenen Übertragungseigenschaften des Leitungsstückes auf den Zustandsvektor $\mathbf{h}(x_2)$ am Eingang ab.

Die Abbildung lautet in braket-Schreibweise

$$|b(x_2)\rangle = \underline{\mathbf{A}}(x_2, x_1) |b(x_1)\rangle \quad (5.10)$$

Es ist offensichtlich, daß die Inverse von $\underline{\mathbf{A}}$ den umgekehrten Betrieb der Leitung beschreibt.

$$|b(x_1)\rangle = \underline{\mathbf{A}}^{-1}(x_2, x_1) |b(x_2)\rangle \quad (5.11)$$

Dem Aneinanderfügen von zwei Leitungsstücken entspricht die sequentielle Abfolge von zwei linearen Abbildungen im Zustandsraum; dies führt zu einer Multiplikation der zugehörigen Kettenmatrizen.

$$|b(x_3)\rangle = \underline{A}_2(x_3, x_2) |b(x_2)\rangle \quad (5.12)$$

$$|b(x_2)\rangle = \underline{A}_1(x_2, x_1) |b(x_1)\rangle \quad (5.13)$$

$$|b(x_3)\rangle = \underline{A}_2 \underline{A}_1 |b(x_1)\rangle \quad (5.14)$$

Die Reihenfolge der Verschaltung der Leitungsstücke ist im allgemeinen nicht vertauschbar, so wie die Matrixmultiplikation im allgemeinen nicht kommutativ ist.

Da es sich um eine lineare Abbildung handelt, läßt sich jede inhomogene Leitung, bei der die das Leitungsstück charakterisierenden Parameter ortsabhängig sind, durch eine Produktintegration von sogenannten 'differentiellen Kettenmatrizen' \underline{D} darstellen, die die Übertragung über ein als homogen anzunehmendes Leitungselement der differentiellen Länge dx beschreibt. (Zur Einführung der Begriffe 'Produktintegration' und 'differentielle Kettenmatrix' s. z.B. /9/)

$$|b(x+dx)\rangle = \underline{D}(x) |b(x)\rangle \quad (5.15)$$

$$|b(x_2)\rangle = \left[\prod_{x=x_1}^{x_2} \underline{D}(x) \right] |b(x_1)\rangle = \underline{A}(x_2, x_1) |b(x_1)\rangle \quad (5.16)$$

5.3.2 Kontragredientes Bezugssystem der Zustandsvektoren

Für weitergehende Rechnungen im Zustandsraum der Leitung wird ein Bezugssystem benötigt, in dem die Zustandsvektoren gemessen werden. Als Bezugssystem für die Zustandsvektoren bietet sich das Eigenvektorsystem der Kettenmatrix an. Wegen der Linearität des Gleichungssystems kann im folgenden ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeingültigkeit vorausgesetzt werden, daß das betrachtete Leitungsstück homogen ist, die Leitungsparameter also nicht von der Längenkoordinate x abhängen. Diese Voraussetzung kann später wieder leicht aufgehoben werden. Unter dieser Bedingung ist das Eigenvektorsystem der differentiellen Matrix \underline{D} mit dem Eigenvektorsystem von \underline{A} identisch.

$$\underline{D} |c_k\rangle = \lambda_k |c_k\rangle \quad (5.17)$$

Das Eigenvektorsystem $|c_{k=1,\dots,n}\rangle$ wird im allgemeinen nicht orthogonal und nicht normiert sein; Rechnungen in diesem Bezugssystem erfordern daher die Angabe der ko- und kontragredienten Basis. Während das Meßergebnis für die Vektorkomponenten von der Basis abhängt, ist das Skalarprodukt eine Invariante des vollständigen Bezugssystems.

Das Eigenvektorsystem $|c_{k=1,\dots,n}\rangle$ der Kettenmatrix \underline{D} wird hier als kogrediente Basis aufgefaßt, die kontragrediente Basis sind die kontragredienten Eigenvektoren $\langle c_{k=1,\dots,n}|$. Die Orthonormierungsbedingungen, die gleichzeitig die Bestimmungsgleichungen für die kontragrediente Basis sind, lauten

$$\langle c_k | c_1 \rangle = \delta_{k1} \quad (5.18)$$

Für den Zustandsvektor der beobachtbaren Klemmengrößen $|b\rangle$ lautet die Darstellung in der kogredienten Basis

$$|b\rangle = \sum_{k=1}^n b^k |c_k\rangle \quad (5.19)$$

Die in Gl. 5.19 definierten Entwicklungskoeffizienten b^k werden im folgenden als (kogrediente) Amplituden des Eigenzustandes k bezeichnet. Die Amplituden b^k können mit Hilfe der kontragredienten Basis als Skalarprodukte mit deren Basisvektoren dargestellt werden.

$$b^k = \langle c_k | b \rangle \quad (5.20)$$

Die Orthonormierungsbedingungen in Gl. 5.18 bestimmen das kontragrediente Basissystem nicht eindeutig; Gl. 5.18 läßt sich nach Einführung einer zunächst willkürliche Konstante a_k für jedes Eigenvektorpaar k erfüllen.

$$\langle a_k c_k | \frac{1}{a_k} c_k \rangle = 1 \quad \text{für alle } a_k \quad (5.21)$$

Für die Wahl der Konstanten a_k kann man eine Vorschrift frei wählen. Durch eine solche Vorschrift wird der hier sogenannte Bezug des Basissystems - das Maßsystem für die Zustandsvektoren - festgelegt. Man kann beispielsweise die a_k so bestimmen, daß die Basisvektoren des kogredienten Systems gerade eine 1 in einer Komponente, d.h. für eine Klemmengröße, aufweisen. Damit sind die kogredienten Amplituden der Eigenzustände in der Maßeinheit dieser Klemmengröße zu messen, entsprechend die Amplituden des kontragredienten Systems in der dazu reziproken Einheit.

Dazu gleichberechtigt sind Vorschriften über Funktionen der Eigenvektoren. Eine zweckmäßige Festlegung ist die Beziehung des Koordinatensystems auf die Wirkleistung N_w . Zur Ermittlung des Wirkleistungstransportes, der durch einen Zustandsvektor gemessen wird, wird der (nichtlineare) Operator Q durch Gl. 5.22 definiert.

$$N_W = Q[|b\rangle] = \text{Re} \left[\sum_{i=1}^n X^i(x) Y_i(x) \right] \quad (5.22)$$

• Anmerkung

In Gl. 5.22 wird die Leistung jedes Klemmengrößenpaares an der Stelle x durch das Produkt der Klemmengrößen dargestellt. Dabei kennzeichnet die verschiedene Stellung der Indizes, daß zur Berechnung der Leistung, die in zeitinvarianten Systemen eine physikalische Invariante ist, das Skalarprodukt der Klemmengrößen gebildet werden muß; im Koordinatensystem jedes Klemmengrößenpaares wird daher die Leistung durch das Produkt der kogredienten Amplitude einer der Klemmengrößen mit der kontragredienten Amplitude der anderen Klemmengröße berechnet, vgl. Gl. 5.6.

Werden beispielsweise die Klemmengrößen mit Hilfe des komplexen Zahlensystems angegeben, ist die Leistung aus dem Produkt einer komplexwertigen Klemmengröße mit dem konjugiert komplexen der anderen Klemmengröße zu bilden, weil zu der Basis der komplexen Zahlen gerade die konjugiert komplexen Zahlen die reziproke Basis sind.

Sind die a_k so bestimmt, daß die Anwendung von Q auf die kogredienten Eigenvektoren gerade die Leistungseinheit ergibt, wird das Bezugssystem leistungsbezogen genannt. Die Anwendung von Q auf einen in diesem System dargestellten Zustandsvektor ergibt als Amplitude direkt die mit dem Zustandsvektor verbundene Wirkleistung.

Im folgenden wird lediglich vorausgesetzt, daß stets ein einheitlicher Bezug der Koordinatensysteme gewählt ist.

5.3.3 Projektoren und Propagatoren

Die Entwicklung des Vektors $|b\rangle$ nach der kogredienten Basis nach Gl. 5.19 stellt den Vektor als Summe der mit den Amplituden b^k gewichteten Basisvektoren dar. Die Bestimmung dieser Teilvektoren kann formal durch den Operator $|c_k\rangle\langle c_k|$ ausgedrückt werden. Dieser Operator wird im folgenden als Projektor \underline{P}_k bezeichnet. Die Projektoren sind $n \times n$ Matrizen und werden durch das dyadische Produkt des ko- und kontragredienten Vektors des entsprechenden Zustandes nach Gl. 5.23 gebildet. Die Eigenschaften sind in den Gln. 5.24 zusammengefaßt.

$$\underline{P}_k = |c_k\rangle\langle c_k| \quad (5.23)$$

$$\underline{P}_k \underline{P}_1 = |c_k\rangle\langle c_k|c_1\rangle\langle c_1| = \delta_{k1} |c_k\rangle\langle c_1| \quad (5.24a)$$

$$\underline{P}_k \underline{P}_1 = 0 \quad \text{für } k <> 1 \quad (5.24b) \quad \underline{P}_k \underline{P}_k = \underline{P}_k \quad (5.24c)$$

Da die Projektoren durch das dyadische Produkt der ko- und kontragredienten Basisvektoren entstehen, sind sie unabhängig von der Wahl der Koeffizienten a_k .

Es wird sich als nützlich erweisen, neben den Projektoren \underline{P} auch sogenannte 'Propagatoren' \underline{T} als 'Leitungsoperatoren' einzuführen. Der Propagator \underline{T}_k übernimmt die Wirkung der Kettenmatrix für den Eigenzustand der Leitung zum Basisvektor $|c_k\rangle$. Mit Hilfe der Projektordefinition, Gl. 5.23, und der Eigenwertgleichung, Gl. 5.17, lassen sich die Propagatoren konstruieren.

$$\begin{aligned} |b(x_2)\rangle &= \underline{A} |b(x_1)\rangle = \sum_{k=1}^m \lambda_k |c_k\rangle\langle c_k|b(x_1)\rangle \\ &= \sum_{k=1}^m \underline{T}_k |b(x_1)\rangle \end{aligned} \quad (5.25)$$

Daraus folgt die Definition der Propagatoren in Gl. 5.26

$$\underline{T}_k = \lambda_k |c_k\rangle\langle c_k| \quad (5.26)$$

Die Eigenschaften der Propagatoren folgen aus ihren Definitionen

$$\underline{T}_k = \lambda_k \underline{P}_k \quad (5.27a)$$

$$\sum_{k=1}^m \underline{T}_k = \underline{A} \quad (5.27b)$$

$$\underline{T}_k \underline{T}_1 = 0 \quad \text{für } k <> 1 \quad (5.27c) \quad \underline{T}_k \underline{T}_k = \lambda_k \underline{T}_k \quad (5.27d)$$

5.3.4 Produktintegration differentieller Kettenmatrizen

Aus den Gl. 5.27 läßt sich eine Vereinfachung der Produktintegration differentieller Kettenmatrizen ableiten. Wegen der in Gl. 5.27d ausgedrückten Eigenschaft der Propagatoren kann man die Produktintegration bei homogenen Leitungsstücken auf die Produktintegration der n Eigenwerte zurückführen.

Aus Gl. 5.24c und Gl. 5.27a kann man ableiten, daß die Projektoren einer homogenen Leitung nicht von der Länge des Leitungsstückes abhängen; die Projektoren und damit das kontragrediente Bezugssystem können daher vollständig aus der differentiellen Matrix berechnet werden. Da die differentielle Matrix im Gegensatz zur finiten Matrix nur schwach besetzt ist, führt diese Eigenschaft zu einer erheblichen Erleichterung in der analytischen Behandlung der Gleichungssysteme und verkürzt die numerisch erforderlichen Rechenschritte.

Durch die Propagatoren kann darüber hinaus die Produktintegration der Kettenmatrix auf Produktintegrationen der Eigenwerte zurückgeführt werden.

$$\prod_{x=0}^{x_0} \underline{Q}(x) = \prod_{x=0}^{x_0} \left[\sum_{k=1}^m \underline{I}_k(x) \right] = \sum_{k=1}^m \left[\underline{P}_k \prod_{x=0}^{x_0} \lambda(x) \right] \quad (5.28)$$

5.4 Leitungswellen an einer Grenzfläche

Der Übergang von einem Leitungsstück zu einem zweiten Leitungsstück mit anderen Parametern erzeugt für die Leitungswellen eine Grenzfläche, an der sie nach Maßgabe der Parameter der Leitungsstücke teilweise reflektiert werden. Solche Übergänge treten bei der Berechnung inhomogener Leitungen über die Produktintegration differentieller homogener Leitungsstücke mit ortsabhängigen Leitungsparametern oder auch bei der Verschaltung zweier Leitungen auf. Die Beschreibung des Grenzflächenverhaltens ist deshalb eine grundlegende Aufgabe bei der Berechnung von Leitungen.

Da die die Leitung beschreibenden Modelle als eindimensional und linear vorausgesetzt sind, kann das Grenzflächenverhalten allein durch die lokalen Parameter der Leitung gekennzeichnet werden, also nur durch die differentiellen Kettenmatrizen auf beiden Seiten der Grenzfläche.

In der hier vorgestellten Theorie gekoppelter Leitungspaare wird das Verhalten der Leitungswellen an einer Grenzfläche auf einen Metrikvergleich zwischen den Bezugssystemen dieser beiden, die Grenzfläche definierende Kettenmatrizen zurückgeführt.

Die Eigenvektoren und Leitungsoperatoren der Leitung auf der einen Seite der Grenzfläche werden durch einen hochgestellten linken Index μ , die Vektoren und Operatoren der Leitung auf der anderen Seite durch den Index ν gekennzeichnet.

Der Zustandsvektor $|b(x)\rangle$ der Leitung an der Stelle der Grenzfläche x läßt sich nach beiden Bezugssystemen entwickeln.

$$|b\rangle = \sum_{k=1}^m \nu \underline{p}_k |b\rangle \quad |b\rangle = \sum_{k=1}^m \mu \underline{p}_k |b\rangle \quad (5.29)$$

Daraus erhält man

$$\sum_{k=1}^m \nu \underline{p}_k |b\rangle = \sum_{k=1}^m \mu \underline{p}_k |b\rangle \quad (5.30)$$

Gl. 5.30 beschreibt das Grenzflächenverhalten vollständig.

Multipliziert man Gl. 5.30 mit dem kontragredienten Vektor $\langle \mu c_k |$ erhält man den Zusammenhang zwischen der Amplitude des Eigenzustandes k im Leitungsstück μ in Abhängigkeit von den Zuständen auf der Leitung ν . Auf der linken Seite der Gleichung bleibt wegen der Orthogonalität der Basisvektoren nur die Amplitude μb^k übrig; die rechte Seite ergibt die Summe von Skalarprodukten der kontragredienten Basisvektoren in μ mit den kogredienten Basisvektoren in ν .

$$\mu b^k = \sum_{l=1}^m \langle \mu c_k | \nu c_l \rangle \langle \nu c_l | b \rangle \quad (5.31a)$$

$$\mu b^k = \sum_{l=1}^m \langle \mu c_k | \nu c_l \rangle \nu b^l \quad (5.31b)$$

Wiederholt man die Multiplikation von Gl. 5.30 sequentiell mit allen Vektoren $\langle \mu c_k |$, so erhält man einen Satz von Gleichungen, die in einer Matrixgleichung zusammengefaßt werden können: Der Vektor der Amplituden μb im Leitungsstück μ ist mit dem Vektor der Amplituden νb im Leitungsstück ν über die Matrix $\mu \nu \underline{G}$ verknüpft.

$$\mu b = \mu \nu \underline{G} \nu b \quad (5.32)$$

$\mu \nu \underline{G}$ wird allein durch die Skalarprodukte der Basisvektoren auf beiden Seiten der Grenzfläche bestimmt,

$$\mu \nu \underline{G}_{k1} = \langle \mu c_k | \nu c_1 \rangle \quad (5.33)$$

Das Grenzflächenverhalten wird somit auf einen Metrikvergleich der durch die Eigenvektoren der Kettenmatrizen auf beiden Seiten der Grenzfläche vorgegebenen Bezugssysteme zurückgeführt. In diesem Zusammenhang kann die Voraussetzung zweier homogener Leitungsstücke aufgehoben werden, denn das Grenzflächenverhalten wird allein durch die Matrizen in differentieller Umgebung um die Grenzfläche bestimmt.

Aus Gl. 5.33 kann man ableiten, daß Leitungsstücke, die das gleiche Eigenvektorsystem aufweisen, aneinandergesetzt werden können, ohne daß Reflexionen auftreten: Dann wird \underline{G} wegen der Orthonormierungsbedingungen des Bezugssystems zur Einheitsmatrix. Dies ist eine notwendige Eigenschaft von \underline{G} bei einem reflexionsfreien Übergang. Da die Matrizenmultiplikation gerade dann kommutativ ist, wenn die Matrizen das gleiche Eigenvektorsystem besitzen, ist auch nur dann die Kettenmultiplikation kommutativ, bzw. die Reihenfolge der Leitungsstücke vertauschbar.

Da die Amplitudenvektoren wie die Grenzflächenmatrix vom Bezug des kontragradierten Koordinatensystems abhängen, können - je nach Bezug des Systems - Reflexions- und Transmissionskoeffizienten z.B. für eine Klemmengröße oder auch die Wirkleistung abgeleitet werden. Bei Vielteoren können auch weitergehende Definitionen derartiger Koeffizienten unter jeweils unterschiedlichen Randbedingungen zweckmäßig sein.

Die übersichtliche Notation des vollständigen Grenzflächenverhaltens durch Gl. 5.33 erlaubt, auch für gekoppelte Leitungen mit unterschiedlichen Klemmengrößenpaaren, die Bedingungen für Leitungsanpassungen in einer zugänglichen Form zu formulieren. Dies gilt für die analytische Behandlung; besonders aber im Hinblick auf numerische Berechnungen ist die Darstellung der Theorie in einer Matrixschreibweise vorteilhaft, da sich die Gleichungen sehr leicht für numerische Rechenverfahren umsetzen lassen.

Die hier vorgestellten allgemeinen Ansätze der Formulierung einer Theorie gekoppelter Leitungen wird in den folgenden Abschnitten für den Dehnwellenleiter und für den Biegewellenleiter konkretisiert.

5.5 Dehnwellenleiter als Einführung

5.5.1 Gleichungssystem des Dehnwellenleiters

Die allgemeine Notation der Theorie gekoppelter Leitungspaare läßt sich auf eine Leitung anwenden, die durch ein Zweitor beschrieben werden kann. Ein einfaches Beispiel für eine solche Leitung ist der Dehnwellenleiter. Der Dehnwellenleiter überträgt Leistung über ein Tor mit dem Klemmengrößenpaar Kraft und Schnelle. Ein Leitungsstück des Dehnwellenleiters wird durch die Werkstoffparameter Dichte ρ und Elastizitätsmodul E und durch den Formparameter Querschnittsfläche F charakterisiert. Das eindimensionale Modell des Dehnwellenleiters beschreibt die Leitung durch zwei gekoppelte lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung für die Kraft K und die Schnelle V .

$$\dot{K}' = -\rho F \dot{V} \quad (5.34a)$$

$$\dot{V}' = -\frac{1}{EF} \dot{K} \quad (5.34b)$$

Bei Betrachtung zeitinvarianter Leitungsphänomene führt eine FOURIER-Transformation bezüglich der Zeitabhängigkeit zu einem linearen Gleichungssystem in den transformierten Klemmengrößen \bar{K} und \bar{V} . Die nunmehr nur noch ortsabhängigen Differentialgleichungen können zusammengefaßt werden; man erhält die differentielle Kettenmatrixform des Gleichungssystems nach Gl. 5.35 (vgl. Gl. 5.15).

$$|b(x+dx)\rangle = \underline{\underline{D}} |b(x)\rangle \quad (5.35)$$

Gl. 5.36 gibt den expliziten Zusammenhang für den Dehnwellenleiter an.

$$\begin{bmatrix} \bar{K}(x+dx) \\ \bar{V}(x+dx) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -jkZ dx \\ -j\frac{k}{Z} dx & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{K}(x) \\ \bar{V}(x) \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

In Gl. 5.36 ist $k = \omega (\rho/E)^{1/2}$ die Wellenzahl und $Z = F(\rho E)^{1/2}$ die Impedanz der Dehnwelle.

5.5.2 Kontragredientes Bezugssystem und Leitungsoperatoren

Aus der Eigenwertgleichung Gl. 5.16 folgen als Lösung des charakteristischen Polynoms von \underline{D}

$$\det(\underline{D} - \lambda \underline{E}) = 0 \quad (5.37)$$

die beiden Eigenwerte in den Gln. 5.38 und die zugehörigen Eigenvektoren in Gln. 5.39.

$$\lambda_1 = 1 - jk dx \quad \lambda_2 = 1 + jk dx \quad (5.38)$$

$$|_{K}c_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{Z} \end{bmatrix} \quad |_{K}c_2\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{Z} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Bei der Bestimmung der Eigenvektoren wird das kraftbezogene, kogrediente System durch Wahl der ersten Komponente der Eigenvektoren zu 1 festgelegt. Die Dimension der zu den kogredienten Vektoren gehörenden Amplituden ist daher die Kräfteinheit. Der Bezug des Basissystems wird durch den Index links unten angezeigt.

Die Eigenzustände $|_{K}c_k\rangle$ lassen sich physikalisch interpretieren: $|_{K}c_1\rangle$ beschreibt mit seinem Eigenwert λ_1 eine in positive x-Richtung laufende Welle; entsprechend $|_{K}c_2\rangle$ und λ_2 eine Welle in negative x-Richtung. Da die kogredienten Vektoren die jeweiligen Wellenanteile kraftbezogen messen, ist das Verhältnis der 1. Komponente zur 2. Komponente der Eigenvektoren gerade die Impedanz der Dehnwellen, also das Verhältnis von Kraft zu Schnelle in diesen Wellen.

Mit Hilfe der Orthonormierungsbedingungen von Gl. 5.18 läßt sich die kontragrediente Basis bestimmen.

$$\langle_{K}c_1| = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ Z \end{bmatrix} \quad \langle_{K}c_2| = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -Z \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Die beiden Projektoren der Dehnwellenleitung ergeben sich aus dem dyadischen Produkt des jeweiligen ko- und kontragredienten Eigenvektors nach Gl. 5.23.

$$\underline{P}_1 = |_{K}c_1\rangle\langle_{K}c_1| = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & Z \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.41a)$$

$$\underline{P}_2 = |_{K}c_2\rangle\langle_{K}c_2| = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -Z \\ -\frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.41b)$$

Nach Gl. 5.27a erhält man aus den Projektoren die Propagatoren durch Multiplikation mit dem entsprechenden Eigenwert.

$$\underline{T}_1 = \lambda_1 \underline{P}_1 = \frac{1}{2} (1 - jk dx) \begin{bmatrix} 1 & Z \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.42a)$$

$$\underline{T}_2 = \lambda_2 \underline{P}_2 = \frac{1}{2} (1 + jk dx) \begin{bmatrix} 1 & -Z \\ -\frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.42b)$$

Für Leistungsbetrachtungen ist die Berechnung der leistungsbezogenen ko- und kontragredienten Vektoren erforderlich. Der Leistungsoperator Q verlangt die Multiplikation der Klemmengrößen Kraft und Schnelle, wobei eine der beiden Größen im Koordinatensystem des Klemmengrößenpaares in der kontragredienten Basis dargestellt sein muß, s. Abschnitt 5.2.1.

Für die Berechnung der Wirkleistung N_w gilt

$$N_w = Q|b\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{K} \bar{V}^*) \quad (5.43)$$

Verlangt man, daß die Anwendung von Q auf jeden Basisvektor die Einheit ergibt, erhält man für das leistungsbezogene System

$$|{}_0c_1\rangle = \begin{bmatrix} \sqrt{Z} \\ 1 \\ \sqrt{Z} \end{bmatrix} \quad (5.44a) \quad |{}_0c_2\rangle = \begin{bmatrix} \sqrt{Z} \\ -1 \\ \sqrt{Z} \end{bmatrix} \quad (5.44b)$$

$$\langle {}_0c_1| = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{Z} \\ \sqrt{Z} \end{bmatrix} \quad (5.44c) \quad \langle {}_0c_2| = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{Z} \\ -\sqrt{Z} \end{bmatrix} \quad (5.44d)$$

Die Amplituden in diesem leistungsbezogenen Basissystem haben die Einheit Watt. Für die Wirkleistungsberechnung gilt unter der Annahme einer rein reellen Impedanz Z

$$\begin{aligned} Q|b\rangle &= Q(\langle {}_0c_1|b\rangle |{}_0c_1\rangle + \langle {}_0c_2|b\rangle |{}_0c_2\rangle) \\ &= Q(\langle {}_0c_1|b\rangle |{}_0c_1\rangle) + Q(\langle {}_0c_2|b\rangle |{}_0c_2\rangle) \\ &= {}_0b^1 {}_0b^{1*} + {}_0b^2 {}_0b^{2*} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Der Wirkleistungsoperator ist im Sonderfall verlustloser Dehnwellenleiter Operator mit distributiven Eigenschaften für die Eigenzustände. Läßt man Verluste zu, wird Z komplexwertig und die Beziehungen in Gl. 5.45 gelten so nicht mehr. Diese Einschränkung spielt für die Betrachtungen des Energieflusses an einer Grenzfläche keine Rolle, wie weiter unten ausgeführt wird.

• *Anmerkung*

Die formale Analogie zur elektrischen Zweitor-Analyse mit Leistungswellen ist an dieser Stelle augenfällig. Benutzt man ein festes Bezugssystem, läßt sich eine Streumatrix einführen. Im Falle des Zweitores bedeutet dies lediglich die Definition einer Bezugsimpedanz, die bei elektrischen Zweitoren zur Verfügung steht. In akustischen Systemen ist die Festlegung einer Bezugsimpedanz im Falle des Zweitores nicht sinnvoll, weil sie sich nicht realisieren läßt. Im Falle eines Vieltors mit unterschiedlichen Klemmengrößen versagt diese Methode darüber hinaus wegen der verschiedenartigen Impedanzen und der komplexeren Abhängigkeit der Bezugssysteme von den Leitungsparametern. Dies wird beim Biegewellenleiter deutlich werden.

Mißt man an einem Ort x der Leitung einen Beobachtungsvektor $|b(x)\rangle$ mit der Kraft \bar{K}_0 und der Schnelle \bar{V}_0 , liefert die Anwendung des Projektors \underline{P}_1 den in der Messung enthaltenen Anteil einer in x-Richtung laufenden Welle

$$\underline{P}_1 |b\rangle = \underline{P}_1 \begin{bmatrix} \bar{K}_0 \\ \bar{V}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{K}_0 + Z \bar{V}_0}{2} \\ \frac{\bar{V}_0 + \bar{K}_0/Z}{2} \end{bmatrix} \quad (5.46a)$$

Entsprechend projiziert \underline{P}_2 aus dem Beobachtungsvektor den Anteil der entgegengesetzt laufenden Welle

$$\underline{P}_2 |b\rangle = \underline{P}_2 \begin{bmatrix} \bar{K}_0 \\ \bar{V}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{K}_0 - Z \bar{V}_0}{2} \\ \frac{\bar{V}_0 - \bar{K}_0/Z}{2} \end{bmatrix} \quad (5.46b)$$

Das Ergebnis ist zunächst unabhängig vom Bezug des Koordinatensystems, da die Projektoren als dyadisches Produkt der ko- und kontragredienten Basisvektoren nicht davon abhängen können. Durch die Multiplikation des Zustandsvektors mit der kraftbezogenen kontragredienten Basis erhält man die Kraftamplituden in diesem Bezugssystem

$$|b\rangle = \frac{1}{2}(\bar{K}_0 + Z\bar{V}_0) |{}_kc_1\rangle + \frac{1}{2}(\bar{K}_0 - Z\bar{V}_0) |{}_kc_2\rangle \quad (5.47)$$

5.5.3 Dehnwellen an einer Grenzfläche

An einer Fugestelle zwischen einem Wellenleiter mit der Impedanz uZ und einem Wellenleiter mit der Impedanz vZ , die, wie in Abb. 5.1 angedeutet, z.B. durch einen Querschnittsprung erzeugt werden kann, werden Wellen teilweise reflektiert und teilweise durchgelassen. Da die Eigenzustände gerade die Wellen in positiver und negativer Richtung beschreiben, soll im folgenden die in Abb. 5.2 definierte Bezeichnungsweise gewählt werden.

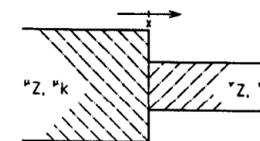


Abb. 5.1 Kopplung zweier Dehnwellenleiter mit den Impedanzen uZ und vZ und den Wellenzahlen uk und vk

Mit h werden die Amplituden der in x-Richtung hinlaufenden Wellen und mit r die Amplituden der rücklaufenden Wellen bezeichnet. Der Index links oben indiziert den Wellenleiter; der Index links unten den Bezug des zugehörigen Koordinatensystems. $|b\rangle$ ist der Zustandsvektor in der Grenzfläche.

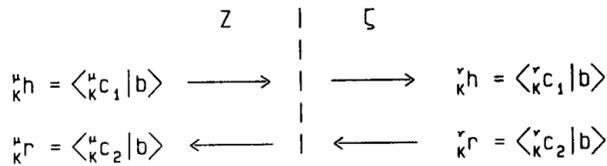


Abb. 5.2 Bezeichnungweise an der Koppelstelle zwischen zwei Dehnwellenleitern

Die Grenzflächenmatrix ${}^{\mu\nu}G_{k1}$ mit ihren Komponenten

$${}^{\mu\nu}G_{k1} = \langle {}^{\mu}c_k | {}^{\nu}c_1 \rangle \quad (5.48)$$

verkoppelt die im Wellenleiter μ existierenden Amplituden mit den im Wellenleiter ν auftretenden Amplituden

$$\begin{bmatrix} {}^{\mu}h \\ {}^{\mu}r \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z}{\zeta} & 1 - \frac{Z}{\zeta} \\ 1 - \frac{Z}{\zeta} & 1 + \frac{Z}{\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{\nu}h \\ {}^{\nu}r \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Unter der Annahme ${}^{\nu}r = 0$ kann man das System so interpretieren, daß eine im Wellenleiter μ mit der Amplitude ${}^{\mu}h$ hinlaufende Welle an der Grenzfläche mit der Amplitude ${}^{\mu}r$ reflektiert wird und mit der Amplitude ${}^{\nu}h$ im Wellenleiter weiterläuft. Der Reflexionskoeffizient ${}^{\mu}r$ und der Transmissionskoeffizient ${}^{\nu}h$ (der Index K kennzeichnet, daß es sich um kraftbezogene Koeffizienten handelt) ergibt sich aus Gl. 5.49 in Übereinstimmung mit den klassischen Rechnungen zu

$${}^{\mu}r = \frac{{}^{\nu}h}{{}^{\mu}h} = \frac{1}{\langle {}^{\mu}c_1 | {}^{\nu}c_1 \rangle} = \frac{2\zeta}{\zeta + Z} \quad (5.50)$$

$${}^{\nu}h = \frac{{}^{\mu}r}{{}^{\mu}h} = \frac{\langle {}^{\mu}c_2 | {}^{\nu}c_1 \rangle}{\langle {}^{\mu}c_1 | {}^{\nu}c_1 \rangle} = \frac{\zeta - Z}{\zeta + Z} \quad (5.51)$$

Entsprechend läßt sich der Energiefluß an der Grenzfläche mit Hilfe des leistungsbezogenen Bezugssystems berechnen. Der Operator Q ist für verlustbehaftete Leitungen nicht distributiv, s.o.: Da aber Verluste für das Grenzflächenverhalten in den linearen, eindimensionalen Modellen im differentiellen Bereich um die Grenzfläche keine Wirkung haben können, ist es ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit erlaubt, auf die Bezugssysteme der verlustlosen Leitung zurückzugreifen. Auch für den Energiefluß wird das klassische Ergebnis verifiziert.

$${}^{\mu\nu}G_{k1} = \langle {}^{\mu}c_k | {}^{\nu}c_1 \rangle \quad (5.52)$$

$$\begin{bmatrix} {}^{\mu}h \\ {}^{\mu}r \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{Z}{\zeta}} + \sqrt{\frac{\zeta}{Z}} & \sqrt{\frac{Z}{\zeta}} - \sqrt{\frac{\zeta}{Z}} \\ \sqrt{\frac{Z}{\zeta}} - \sqrt{\frac{\zeta}{Z}} & \sqrt{\frac{Z}{\zeta}} + \sqrt{\frac{\zeta}{Z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{\nu}h \\ {}^{\nu}r \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Für die Reflexion und Transmission der Wirkleistung gilt

$${}^{\mu}r = \frac{{}^{\nu}h}{{}^{\mu}h} = \frac{4\zeta Z}{(\zeta + Z)^2} \quad (5.54)$$

$${}^{\nu}h = \frac{{}^{\mu}r}{{}^{\mu}h} = 1 - \frac{4\zeta Z}{(\zeta + Z)^2} \quad (5.55)$$

5.5.4 Produktintegration einer differentiellen Kettenmatrix

Die Integration des Gleichungssystems läßt sich für ein finites, homogenes Leitungsstück der Länge x mit Hilfe der Propagatoren durchführen. Nach Gl. 5.16 gilt für die finite Kettenmatrix

$$\underline{A}(x) = \prod_{x=0}^x \underline{D} = \prod_{x=0}^x (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \quad (5.56)$$

$$= \left(\prod_{x=0}^x \lambda_1 \right) \underline{P}_1 + \left(\prod_{x=0}^x \lambda_2 \right) \underline{P}_2$$

Die einfach durchzuführende Produktintegration der Eigenwerte ergibt

$$\prod_{x=0}^x (1 - jk dx) = e^{-jkx} = \lambda_1(x) \quad (5.57a)$$

$$\prod_{x=0}^x (1 + jk dx) = e^{+jkx} = \lambda_2(x) \quad (5.57b)$$

Dann folgt aus Gl. 5.56 die finite Kettenmatrix.

$$\underline{\underline{A}}(x) = \begin{bmatrix} \cos kx & -jZ \sin kx \\ -j\frac{1}{Z} \sin kx & \cos kx \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

Die Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$ sind gleichzeitig durch die Gln. 5.57 gegeben, da die Eigenvektoren und die Projektoren von $\underline{\underline{A}}$ mit denen von $\underline{\underline{D}}$ identisch sind.

5.5.5 Zur Reziprozität des Dehnwellenleiters

Die einfache Prüfung der Determinante von $\underline{\underline{A}}$ ergibt, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für das Zweitoren, $\det(\underline{\underline{A}}) = 1$, erfüllt ist. Der Dehnwellenleiter ist eine reziproke Leitung.

Am Beispiel des Dehnwellenleiters soll eine Konsequenz der Reziprozität von Leitungen aufgezeigt werden, die für den Biegewellenleiter zur Interpretation hilfreich sein wird: Es gilt allgemein für eine quadratische Matrix, daß der absolute Term im charakteristischen Polynom in λ einer solchen Matrix gerade durch die Determinante der Matrix gebildet wird. Da sich jedes Polynom auch durch das Produkt seiner Wurzeln darstellen läßt, erzwingt dieser Satz, daß im Falle einer 2x2 Matrix, für die die Determinante gleich 1 ist, die Eigenwerte reziprok zueinander sein müssen, s. Gl. 5.59.

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \quad (5.59a)$$

$$\lambda_1\lambda_2 = 1 \quad (5.59b)$$

Die differentiellen und finiten Eigenwerte des Dehnwellenleiters erfüllen diese Bedingung, weil sie jeweils zueinander konjugiert komplex und damit reziprok sind. Aus dieser Forderung für das Produkt der Eigenwerte läßt sich mit Gl. 5.57 eine physikalische Interpretation der Reziprozität für Wellenleiter ableiten, die durch Zweitoren dargestellt werden können: Ein Wellenleiter ist dann und nur dann reziprok, wenn die Wellenzahlen für die hinlaufenden und für die rücklaufenden Wellen gerade betragsgleich sind. Die Interpretation dieses Aspektes der Reziprozität läßt sich in erweiterter Form aus der Determinantenbedingung auch für den Biegewellenleiter formulieren.

Die Behandlung des Dehnwellenleiters hat gezeigt, wie mit der diskutierten Theorie bekannte Leitungseigenschaften bei Zweitoren reproduziert werden. Eine denkökonomischere Darstellung dieses Falles ergibt sich letztlich nicht; alle Rechnungen sind auch in den bisher bekannten Beschreibungsmethoden übersichtlich und analytisch ohne erheblichen Aufwand durchzuführen. Die Beschreibung des Grenzflächenverhaltens als formalisiertes Metrikproblem der Eigenvektorräume der Kettenmatrizen bringt entscheidende Vorteile in höherdimensionalen Zustandsräumen, z.B. beim Biegewellenleiter vorliegen.

und λ_4 gehören zu einer Biegewelle, die sich mit der Wellenzahl η in positiver bzw. negativer x-Richtung ausbreitet. Dieser Biegewellentyp wird im folgenden als η -Welle bezeichnet.

Die Ausbreitungseigenschaften der Biegewellen werden durch die Abhängigkeit beider Wellenzahlen von den Werkstoff- und Formparametern und von der Frequenz geprägt. Solange k , κ , Z und ζ reell sind (dies ist für die verlustlose Leitung der Fall), ist ϵ stets reell, η jedoch in Abhängigkeit von der Wellenzahl der Scherwelle entweder reell oder imaginär: die ϵ -Welle ist stets ausbreitungsfähig, während die η -Welle nach Maßgabe der Diskriminante in Gl. 5.65b ausbreitungsfähig oder nicht ausbreitungsfähig sein kann. Nach Gl. 5.65b ergeben sich nur dann ausbreitungsfähige η -Wellen, wenn die reziproke Wellenzahl der Scherwelle kleiner ist als der sogenannte 'Trägheitsradius' r der Querschnittsfläche des Biegewellenleiters.

$$k \geq \frac{1}{r} \quad (5.66)$$

Der Trägheitsradius r ist definiert als die Wurzel aus dem Verhältnis des Flächenträgheitsmomentes I zur Fläche F in Gl. 5.67.

$$r = \sqrt{\frac{I}{F}} \quad (5.67)$$

In Abb. 5.3 ist die Frequenzabhängigkeit der beiden Biegewellenzahlen für die Biegeschwingungen in beiden Biegeebenen des in Kap.3 betrachteten Probekalkens aufgetragen. Nach dem Schubelastischen BERNOULLI-Modell sind ab einer Frequenz von 42,63658 kHz bei den (h)-Biegewellen und von 86,36640 kHz bei den (b)-Biegewellen beide Wellenzahlen reell und führen zu ausbreitungsfähigen Wellen.

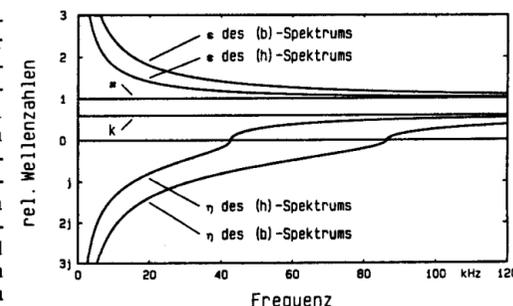


Abb. 5.3 Frequenzabhängigkeit der auf die Wellenzahl der Scherwelle bezogenen Wellenzahlen für den Probekalken für (b)- und (h)-Biegewellen

Mit Hilfe der Wellenzahlen und läßt sich das kraftbezogene, kontragrediente Bezugssystem des Biegewellenleiters überschaubar formulieren. Es ist als Gl. 5.68 zusammengefaßt in Taf. 5.1 dargestellt.

Taf. 5.1 Kraftbezogenes Bezugssystem eines Biegewellenleiters (Gln. 5.68)

$$\begin{aligned}
 |_{kC_1}\rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\epsilon}{kZ} \\ j\frac{\epsilon\zeta}{\kappa kZ}(k^2-\epsilon^2) \\ j\frac{1}{kZ}(k^2-\epsilon^2) \end{bmatrix} & \langle_{kC_1}| &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{k^2-\eta^2}{\epsilon^2-\eta^2} \\ \frac{kZ}{\epsilon} \frac{k^2-\eta^2}{\epsilon^2-\eta^2} \\ j\frac{\kappa kZ}{\epsilon\zeta} \frac{1}{\epsilon^2-\eta^2} \\ jkZ \frac{1}{\epsilon^2-\eta^2} \end{bmatrix} \\
 |_{kC_2}\rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\epsilon}{kZ} \\ -j\frac{\epsilon\zeta}{\kappa kZ}(k^2-\epsilon^2) \\ j\frac{1}{kZ}(k^2-\epsilon^2) \end{bmatrix} & \langle_{kC_2}| &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{k^2-\eta^2}{\epsilon^2-\eta^2} \\ -\frac{kZ}{\epsilon} \frac{k^2-\eta^2}{\epsilon^2-\eta^2} \\ -j\frac{\kappa kZ}{\epsilon\zeta} \frac{1}{\epsilon^2-\eta^2} \\ jkZ \frac{1}{\epsilon^2-\eta^2} \end{bmatrix} \\
 |_{kC_3}\rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\eta}{kZ} \\ j\frac{\eta\zeta}{\kappa kZ}(k^2-\eta^2) \\ j\frac{1}{kZ}(k^2-\eta^2) \end{bmatrix} & \langle_{kC_3}| &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{k^2-\epsilon^2}{\eta^2-\epsilon^2} \\ \frac{kZ}{\eta} \frac{k^2-\epsilon^2}{\eta^2-\epsilon^2} \\ j\frac{\kappa kZ}{\eta\zeta} \frac{1}{\eta^2-\epsilon^2} \\ jkZ \frac{1}{\eta^2-\epsilon^2} \end{bmatrix} \\
 |_{kC_4}\rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\eta}{kZ} \\ -j\frac{\eta\zeta}{\kappa kZ}(k^2-\eta^2) \\ j\frac{1}{kZ}(k^2-\eta^2) \end{bmatrix} & \langle_{kC_4}| &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{k^2-\epsilon^2}{\eta^2-\epsilon^2} \\ -\frac{kZ}{\eta} \frac{k^2-\epsilon^2}{\eta^2-\epsilon^2} \\ -j\frac{\kappa kZ}{\eta\zeta} \frac{1}{\eta^2-\epsilon^2} \\ jkZ \frac{1}{\eta^2-\epsilon^2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Die Eigenzustände $|c_k\rangle$ lassen sich physikalisch interpretieren: Sie beschreiben mit ihren zugehörigen Eigenwerten die im Biegewellenleiter möglichen vier voneinander unabhängigen Wellen, die mit paarweise gleichem Charakter in beiden Richtungen der Leitung vorhanden sind. Die Verhältnisse der Komponenten der einzelnen Eigenvektoren bestimmen das Verhältnis der vier Klemmengrößen zueinander bei dem jeweiligen Wellentyp. Das Verhältnis der 1. zur 2. Komponente und entsprechend der 3. und 4. Komponente liefert die torspezifischen Impedanzen der Scher- bzw. Drehwelle innerhalb der Biegewelle, Gln. 5.69 bzw. Gln. 5.70.

$$\frac{\bar{K}}{V}(\epsilon) = \pm \frac{k}{\epsilon} Z \quad (5.69a) \quad \frac{\bar{K}}{V}(\eta) = \pm \frac{k}{\eta} Z \quad (5.69b)$$

$$\frac{\bar{M}}{Q}(\epsilon) = \pm \frac{\epsilon}{\kappa} \zeta \quad (5.70a) \quad \frac{\bar{M}}{Q}(\eta) = \pm \frac{\eta}{\kappa} \zeta \quad (5.70b)$$

Durch eine der beiden verallgemeinerten Impedanzen, 1. zu 4. oder 3. zu 2. Komponente, s. Gln. 5.71, sind die Verhältnisse der Klemmengrößen zueinander vollständig bei jedem Eigenzustand festgelegt.

$$\frac{\bar{K}}{Q}(\epsilon) = -j \frac{kZ}{k^2-\epsilon^2} \quad (5.71a) \quad \frac{\bar{K}}{Q}(\eta) = -j \frac{kZ}{k^2-\eta^2} \quad (5.71b)$$

Biegewellenimpedanzen sind allgemein frequenzabhängig; sie sind aber unabhängig vom Bezug des Basissystems, da die beziehenden Faktoren a_k allen Vektorkomponenten jeweils gemeinsam sind. Die verallgemeinerten Impedanzen nach Gln. 5.71 zeigen, daß im verlustfreien Fall die Dreh- und die Scherwelle als Teilwellen einen starren Phasenunterschied von $\pi/2$ aufweisen. Abb. 5.4 zeigt ein Bild der Verschiebungen bei der Ausbreitung der beiden Wellentypen.

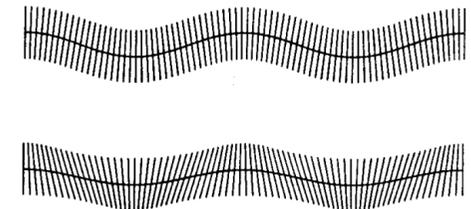


Abb. 5.4 Schematische Darstellung der Durchbiegung und des Drehwinkels, ε-Wellen (oben) und η-Wellen (unten)

Die analytische Berechnung des leistungsbezogenen kontragredienten Bezugssystems ist aufwendig und führt letztlich nicht zu direkt auswertbaren Ergebnissen. Die weiter unten betrachtete Übertragung von Leistung an einer Grenzfläche zwischen zwei Biegewellenleitern wird aufzeigen, daß die Bildung

von Reflexions- und Transmissionsfaktoren zwischen den acht beteiligten Wellen analytisch kaum mehr darzustellen ist. Deshalb soll an dieser Stelle auf die Ausrechnung des leistungsbezogenen Bezugssystems verzichtet werden.

Für numerische Rechnungen sind die allgemeinen Vorschriften des Wirkleistungsoperators formal auf das 4 x 4 System des Biegewellenleiters anzuwenden. Wie beim Dehnwellenleiter ist zu beachten, daß im FOURIER-Raum die kontragredienten Koordinatensysteme der Klemmengrößen Querkraft und Querschnelle bzw. Drehmoment und Drehschnelle das jeweilige Leistungsprodukt für jedes aus einer Klemmengröße mit dem konjugiert komplexen Partner zu bilden ist. Es gilt für die Wirkleistung

$$N_w = Q[b] = \text{Re}(\bar{K}\bar{V}^* + \bar{M}\bar{Q}^*) \tag{5.72}$$

Verlangt man, daß diese Vorschrift - angewendet auf die Eigenvektoren - die Leistungseinheit ergibt, erhält man die erforderlichen Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten a_k . Die Amplituden in diesem leistungsbezogenen System der Eigenvektoren haben die Einheit (Watt)^{1/2}.

Anmerkung

Die Koeffizienten für die Basisvektoren der η -Welle divergieren, solange diese Wellen nach Maßgabe der Bedingung in Gl. 5.66 nicht ausbreitungsfähig sind, da dann diese Wellen keine Wirkleistung übertragen können.

Die vier Projektoren der Biegewellenleitung ergeben sich aus dem dyadischen Produkt der jeweiligen ko- und kontragredienten Eigenvektoren nach Gl. 5.23. Die Projektoren sind in Taf. 5.2 als Gln. 5.73 zusammengefaßt.

Nach Gl. 5.26 erhält man aus den Projektoren die Propagatoren durch Multiplikation mit dem zugehörigen Eigenwert. Auf eine Notierung der Propagatoren wird hier verzichtet, sie ergeben sich formal nach Gl. 5.25a.

$$\begin{aligned}
 \underline{P}_1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{e^2 - \eta^2} \begin{bmatrix} (k^2 - \eta^2) & \frac{kZ}{e} (k^2 - \eta^2) & j \frac{\eta k Z}{e \zeta} & j k Z \\ \frac{e}{kZ} (k^2 - \eta^2) & (k^2 - \eta^2) & j \frac{\eta}{\zeta} & j e \\ -j e & -j k Z & (\eta^2 - \eta^2) & \frac{e \zeta}{\eta} (\eta^2 - \eta^2) \\ -j \frac{\eta}{\zeta} & -j \frac{\eta k Z}{e \zeta} & \frac{\eta}{e \zeta} (\eta^2 - \eta^2) & (\eta^2 - \eta^2) \end{bmatrix} \\
 \underline{P}_2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{e^2 - \eta^2} \begin{bmatrix} (k^2 - \eta^2) & -\frac{kZ}{e} (k^2 - \eta^2) & -j \frac{\eta k Z}{e \zeta} & j k Z \\ -\frac{e}{kZ} (k^2 - \eta^2) & (k^2 - \eta^2) & j \frac{\eta}{\zeta} & -j e \\ j e & -j k Z & (\eta^2 - \eta^2) & -\frac{e \zeta}{\eta} (\eta^2 - \eta^2) \\ -j \frac{\eta}{\zeta} & j \frac{\eta k Z}{e \zeta} & -\frac{\eta}{e \zeta} (\eta^2 - \eta^2) & (\eta^2 - \eta^2) \end{bmatrix} \\
 \underline{P}_3 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\eta^2 - e^2} \begin{bmatrix} (k^2 - e^2) & \frac{kZ}{\eta} (k^2 - e^2) & j \frac{\eta k Z}{\eta \zeta} & j k Z \\ \frac{\eta}{kZ} (k^2 - e^2) & (k^2 - e^2) & j \frac{\eta}{\zeta} & j \eta \\ -j \eta & -j k Z & (\eta^2 - e^2) & \frac{\eta \zeta}{\eta} (\eta^2 - e^2) \\ -j \frac{\eta}{\zeta} & -j \frac{\eta k Z}{\eta \zeta} & \frac{\eta}{\eta \zeta} (\eta^2 - e^2) & (\eta^2 - e^2) \end{bmatrix} \\
 \underline{P}_4 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\eta^2 - e^2} \begin{bmatrix} (k^2 - e^2) & -\frac{kZ}{\eta} (k^2 - e^2) & -j \frac{\eta k Z}{\eta \zeta} & j k Z \\ -\frac{\eta}{kZ} (k^2 - e^2) & (k^2 - e^2) & j \frac{\eta}{\zeta} & -j \eta \\ j \eta & -j k Z & (\eta^2 - e^2) & -\frac{\eta \zeta}{\eta} (\eta^2 - e^2) \\ -j \frac{\eta}{\zeta} & j \frac{\eta k Z}{\eta \zeta} & -\frac{\eta}{\eta \zeta} (\eta^2 - e^2) & (\eta^2 - e^2) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Taf. 5.2 Projektoren eines Biegewellenleiters (Gl. 5.73)

5.6.3 BiegeWellen an einer Grenzfläche

An einer Grenzfläche zwischen zwei BiegeWellenleitern mit den Parametern nach Abb. 5.5, die z.B. durch einen Querschnittsprung erzeugt werden kann, werden BiegeWellen teilweise reflektiert und teilweise durchgelassen. Da die Eigenzustände jeweils die ϵ - und η -Wellen in positiver und negativer Richtung beschreiben, soll im folgenden die in Abb. 5.6 definierte Bezeichnungsweise gewählt werden.

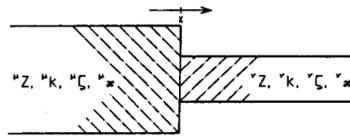


Abb. 5.5 Kopplung zweier BiegeWellenleiter mit den Parametern $\mu_z, \mu_\zeta, \mu_k, \mu_\kappa$ und $\nu_z, \nu_\zeta, \nu_k, \nu_\kappa$

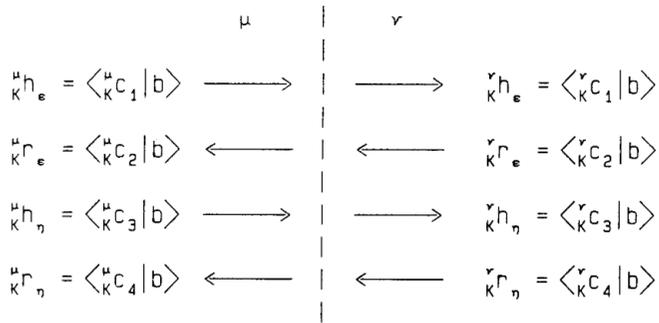


Abb. 5.6 Bezeichnungsweise der Amplituden an der Koppelstelle zweier BiegeWellenleiter

Mit h werden die Amplituden der in x -Richtung hinlaufenden Wellen und mit r die Amplituden der rücklaufenden Wellen bezeichnet. Der Index links oben indiziert den Wellenleiter; der Index links unten den Bezug des zugehörigen Basissystems und der Index rechts unten unterscheidet die beiden Wellentypen durch die zugehörige Wellenzahl. $|b\rangle$ ist der Zustandsvektor in der Grenzfläche. Das Grenzflächenverhalten wird zunächst im kraftbezogenen Bezugssystem untersucht.

Die Grenzflächenmatrix ${}^{\mu\nu}G_K$

$${}^{\mu\nu}G_{k1} = \langle \mu_k c_k | \nu_k c_1 \rangle \tag{5.74}$$

verkoppelt die im Wellenleiter μ angeregten Amplituden mit den im Wellenleiter ν auftretenden Amplituden.

$$\begin{bmatrix} \mu_k h_\epsilon \\ \mu_k r_\epsilon \\ \mu_k h_\eta \\ \mu_k r_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mu_k c_1 | \nu_k c_1 \rangle & \langle \mu_k c_1 | \nu_k c_2 \rangle & \langle \mu_k c_1 | \nu_k c_3 \rangle & \langle \mu_k c_1 | \nu_k c_4 \rangle \\ \langle \mu_k c_2 | \nu_k c_1 \rangle & \langle \mu_k c_2 | \nu_k c_2 \rangle & \langle \mu_k c_2 | \nu_k c_3 \rangle & \langle \mu_k c_2 | \nu_k c_4 \rangle \\ \langle \mu_k c_3 | \nu_k c_1 \rangle & \langle \mu_k c_3 | \nu_k c_2 \rangle & \langle \mu_k c_3 | \nu_k c_3 \rangle & \langle \mu_k c_3 | \nu_k c_4 \rangle \\ \langle \mu_k c_4 | \nu_k c_1 \rangle & \langle \mu_k c_4 | \nu_k c_2 \rangle & \langle \mu_k c_4 | \nu_k c_3 \rangle & \langle \mu_k c_4 | \nu_k c_4 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_k h_\epsilon \\ \nu_k r_\epsilon \\ \nu_k h_\eta \\ \nu_k r_\eta \end{bmatrix} \tag{5.75}$$

Durch Vorgabe von Randbedingungen können wie beim Dehnwellenleiter Reflexions- und Transmissionskoeffizienten definiert werden. Da beim BiegeWellenleiter in jeder Richtung zwei unabhängige Wellentypen möglich sind, die durch die Grenzfläche miteinander verkoppelt werden, wird eine Fallunterscheidung nach dem Typ der einfallenden Welle erforderlich. Im Fall einer einfallenden ϵ -Welle wird die Amplitude der in gleicher Richtung laufenden η -Welle zu null gesetzt; als weitere Randbedingungen sind die entgegengesetzt laufenden Wellen auf der anderen Seite der Grenzfläche zu null anzunehmen. Dann wird ein Anteil der einlaufenden Welle in die rücklaufende ϵ -Welle und ein zweiter in die rücklaufende η -Welle reflektiert. Die Reflexion wird also durch zwei Koeffizienten bestimmt. Bei der Transmission koppelt die einlaufende Welle ebenfalls mit beiden in gleicher Richtung laufenden Wellentypen; auch hier werden zwei Koeffizienten benötigt.

Noch einmal die gleiche Anzahl von Koeffizienten erhält man für den zweiten Fall einer einfallenden η -Welle unter entsprechenden Randbedingungen. Insgesamt ergeben sich daher 4 Reflexions- und 4 Transmissionskoeffizienten, die in den Gln. 5.76-83 zusammengestellt sind. Die Koeffizienten tragen im ersten Index unten rechts die Kennzeichnung des einfallenden Wellentyps und im zweiten Index unten rechts den mit ihm über den Koeffizienten gekoppelten Wellentyp.

$$K_{\epsilon\epsilon}^R = \frac{\langle \mu_k c_2 | \nu_k c_1 \rangle \langle \mu_k c_3 | \nu_k c_3 \rangle - \langle \mu_k c_3 | \nu_k c_1 \rangle \langle \mu_k c_2 | \nu_k c_3 \rangle}{\langle \mu_k c_1 | \nu_k c_1 \rangle \langle \mu_k c_3 | \nu_k c_3 \rangle - \langle \mu_k c_3 | \nu_k c_1 \rangle \langle \mu_k c_1 | \nu_k c_3 \rangle} \tag{5.76}$$

$$K_{\epsilon\eta}^R = \frac{\langle \mu_k c_4 | \nu_k c_1 \rangle \langle \mu_k c_3 | \nu_k c_3 \rangle - \langle \mu_k c_3 | \nu_k c_1 \rangle \langle \mu_k c_4 | \nu_k c_3 \rangle}{\langle \mu_k c_1 | \nu_k c_1 \rangle \langle \mu_k c_3 | \nu_k c_3 \rangle - \langle \mu_k c_3 | \nu_k c_1 \rangle \langle \mu_k c_1 | \nu_k c_3 \rangle} \tag{5.77}$$

$$K_{\eta\epsilon}^T = \frac{\langle \mu_k c_3 | \nu_k c_3 \rangle}{\langle \mu_k c_1 | \nu_k c_1 \rangle \langle \mu_k c_3 | \nu_k c_3 \rangle - \langle \mu_k c_3 | \nu_k c_1 \rangle \langle \mu_k c_1 | \nu_k c_3 \rangle} \tag{5.78}$$

$$K_{\epsilon\eta}^T = \frac{-\langle \mu_{K C_3} | \nu_{K C_1} \rangle}{\langle \mu_{K C_1} | \nu_{K C_1} \rangle \langle \mu_{K C_3} | \nu_{K C_3} \rangle - \langle \mu_{K C_3} | \nu_{K C_1} \rangle \langle \mu_{K C_1} | \nu_{K C_3} \rangle} \quad (5.79)$$

$$K_{\eta\eta}^R = \frac{\langle \mu_{K C_1} | \nu_{K C_1} \rangle \langle \mu_{K C_4} | \nu_{K C_3} \rangle - \langle \mu_{K C_4} | \nu_{K C_1} \rangle \langle \mu_{K C_1} | \nu_{K C_3} \rangle}{\langle \mu_{K C_1} | \nu_{K C_1} \rangle \langle \mu_{K C_3} | \nu_{K C_3} \rangle - \langle \mu_{K C_3} | \nu_{K C_1} \rangle \langle \mu_{K C_1} | \nu_{K C_3} \rangle} \quad (5.80)$$

$$K_{\eta\epsilon}^R = \frac{\langle \mu_{K C_1} | \nu_{K C_1} \rangle \langle \mu_{K C_2} | \nu_{K C_3} \rangle - \langle \mu_{K C_2} | \nu_{K C_1} \rangle \langle \mu_{K C_1} | \nu_{K C_3} \rangle}{\langle \mu_{K C_1} | \nu_{K C_1} \rangle \langle \mu_{K C_3} | \nu_{K C_3} \rangle - \langle \mu_{K C_3} | \nu_{K C_1} \rangle \langle \mu_{K C_1} | \nu_{K C_3} \rangle} \quad (5.81)$$

$$K_{\eta\eta}^T = \frac{\langle \mu_{K C_1} | \nu_{K C_1} \rangle}{\langle \mu_{K C_1} | \nu_{K C_1} \rangle \langle \mu_{K C_3} | \nu_{K C_3} \rangle - \langle \mu_{K C_3} | \nu_{K C_1} \rangle \langle \mu_{K C_1} | \nu_{K C_3} \rangle} \quad (5.82)$$

$$K_{\eta\epsilon}^T = \frac{-\langle \mu_{K C_1} | \nu_{K C_3} \rangle}{\langle \mu_{K C_1} | \nu_{K C_1} \rangle \langle \mu_{K C_3} | \nu_{K C_3} \rangle - \langle \mu_{K C_3} | \nu_{K C_1} \rangle \langle \mu_{K C_1} | \nu_{K C_3} \rangle} \quad (5.83)$$

Die Berechnung des Energieflusses erfolgt mit Hilfe der leistungsbezogenen Eigenvektoren und den fortzuschreibenden Vorschriften nach Gl. 5.54 und 5.55 bei Dehnwellen. Um die Leistungsreflexion und -transmission unterteilt nach den gleichen Klassen wie oben - zu erhalten, sind in den einzelnen Koeffizienten die kraftbezogenen Amplituden durch die wirkleistungsbezogenen Amplituden zu ersetzen und entsprechend das Betragsquadrat der Koeffizienten zu bilden.

Für den Wirkleistungsreflexionsfaktor einer ϵ -Welle gilt beispielsweise

$$N_w R_{\epsilon\epsilon} = \left| \frac{\langle \mu_{Q C_2} | \nu_{Q C_1} \rangle \langle \mu_{Q C_3} | \nu_{Q C_3} \rangle - \langle \mu_{Q C_3} | \nu_{Q C_1} \rangle \langle \mu_{Q C_2} | \nu_{Q C_3} \rangle}{\langle \mu_{Q C_1} | \nu_{Q C_1} \rangle \langle \mu_{Q C_3} | \nu_{Q C_3} \rangle - \langle \mu_{Q C_3} | \nu_{Q C_1} \rangle \langle \mu_{Q C_1} | \nu_{Q C_3} \rangle} \right|^2 \quad (5.84)$$

Die übrigen Koeffizienten erhält man entsprechend aus den Gln. 5.77 - 5.83.

Man überzeugt sich leicht, daß weitere analytische Rechnungen eine explizite Ausführung der Skalarprodukte erfordern würde, die zu langen und unübersichtlichen Ausdrücken führt. Eine nähere Analyse der Produkte zeigt, daß die einzelnen Terme zwar die Tendenz aufweisen, von den Verhältnissen der sich jeweilig entsprechenden Wellenzahlen und Impedanzen der beiden Leitungstücke abzuhängen. Aber es treten auch Terme auf, die Verhältnisse von Summen und Differenzen der Quadrate der nichtlinear frequenzabhängigen Biegewellenzahlen enthalten, so daß die Einführung von Parameterverhältnissen, wie sie bei Zweitoren üblich ist, keine weitere Vereinfachung erwarten läßt.

Physikalisch und technisch wichtige Aussagen über das Übertragungsverhalten des Biegewellenleiters sind letztlich wegen der Komplexität der Gleichungen nicht mehr ableitbar. Vernachlässigungen und Vereinfachungen des zugrunde liegenden Modells lösen das Problem nicht oder nur in Grenzfällen, weil durch derartige Beschränkungen das prinzipielle Verhalten der als gekoppelte Leitungspare auftretenden Biegewellen nicht mehr erfaßt wird.

Unter dem Gesichtspunkt einer numerischen Berechnung allerdings beschreiben die Gln. 5.76 - 5.83 das Grenzflächenverhalten in einer äußerst einfachen und leicht umsetzbaren Form. Im folgenden soll das typische Grenzflächenverhalten von Biegewellen an einem Beispiel anhand numerischer Ergebnisse untersucht werden.

Während das Grenzflächenverhalten von Dehnwellenleitern nur vom relativen Unterschied der Dehnwellenimpedanzen beider Leitungstücke bestimmt wird, hängen die Reflexion und die Transmission bei Biegewellenleitern von acht Parametern ab. Zu den vier beteiligten Impedanzen der Scher- und Drehwelle kommen die vier Biegewellenzahlen.

Aus der Fülle der Variationsmöglichkeiten des Problems wird deshalb beispielhaft die Reflexion und Transmission von Biegewellen aus dem Prohebalken für seine (h)-Wellen an einer Grenzfläche mit Wellenleitern aus gleichem Material aber einer anderen Profilhöhe betrachtet. Ein Balkenstück mit der Profilhöhe des Prohebalkens $h_0 = 39,5$ mm wird als Bezugswellenleiter bezeichnet. Die Ergebnisse werden zunächst bei einer Betriebsfrequenz von 20 kHz vorgestellt. Da bei dieser Frequenz die kritische Bedingung nach Gl. 5.66 für den Bezugswellenleiter noch nicht erfüllt ist, werden die Untersuchungen durch die Ergebnisse bei 60 kHz ergänzt; bei dieser Frequenz können auch im Bezugswellenleiter η -Wellen zum Energiefluß beitragen.

Bei der Betriebsfrequenz 20 kHz ist nur die Anregung einer ϵ -Welle als einlaufende Welle möglich, weil im Bezugswellenleiter über η -Wellen keine Leistung zur Grenzfläche transportiert werden kann. Abb. 5.7a zeigt die Leistungsaufteilung an der Grenzfläche. Wegen der Zeitinvarianz ist die Wirkleistung eine Erhaltungsgröße; die einzelnen Beiträge addieren sich gerade zu 1. Bei Anschluß eines Wellenleiters, in dem wie im Bezugswellenleiter η -Wellen nicht ausbreitungsfähig sind, $h_0/h = 0,469$, erfolgt die Aufteilung der Wirkleistung nur zwischen den ϵ -Wellen. Die Leitung ist bei gleicher Profilhöhe re-

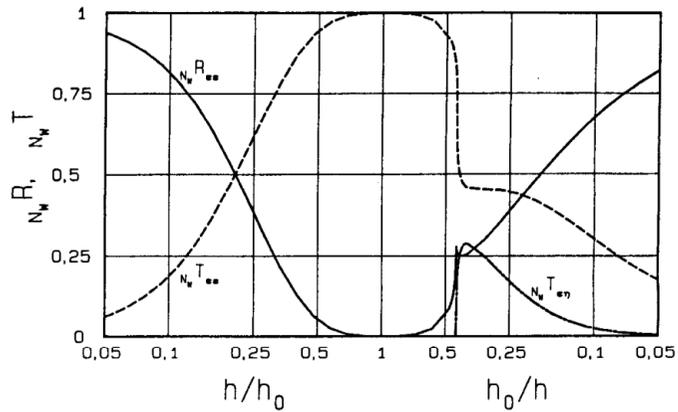


Abb. 5.7a Reflexion und Transmission von Wirkleistung an der Grenzfläche zwischen zwei Biegewellenleitern in Abhängigkeit von der Profilhöhe, Anregung einer ϵ -Welle im Wellenleiter mit $h = h_0$ bei einer Betriebsfrequenz von 20 kHz, $h_0 = 39,5$ mm

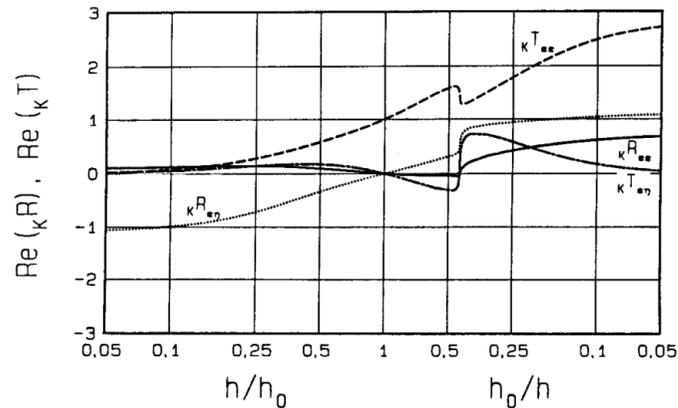


Abb. 5.7b Realteile der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten im kraftbezogenen Bezugssystem an der Grenzfläche zwischen zwei Biegewellenleitern in Abhängigkeit von der Profilhöhe, Anregung einer ϵ -Welle im Wellenleiter mit $h = h_0$ bei einer Betriebsfrequenz von 20 kHz, $h_0 = 39,5$ mm

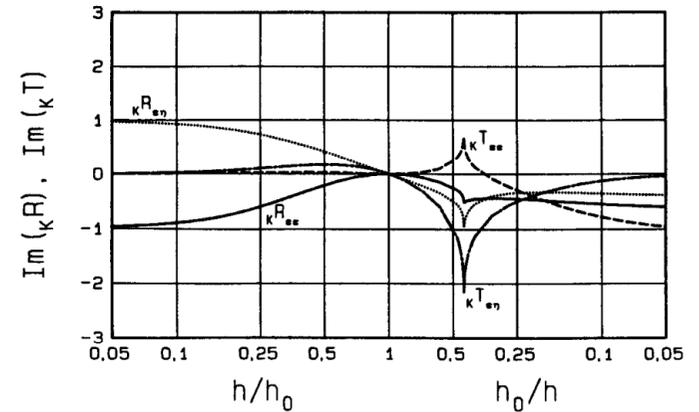


Abb. 5.7c Imaginärteile der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten im kraftbezogenen Bezugssystem an der Grenzfläche zwischen zwei Biegewellenleitern in Abhängigkeit von der Profilhöhe, Anregung einer ϵ -Welle im Wellenleiter mit $h = h_0$ bei einer Betriebsfrequenz von 20 kHz, $h_0 = 39,5$ mm

flexionsfrei. Der Einsatz der η -Wellen beginnt sprunghaft bei Erreichen des kritischen Trägheitsradius, der einer kritischen Profilhöhe entspricht. Ihr Anteil bleibt aber stets kleiner als der Anteil der ϵ -Welle. Für sehr kleine Profilhöhen ist der Beitrag des zweiten Typs zu vernachlässigen.

Die Abb. 5.7b und 5.7c zeigen die Real- bzw. die Imaginärteile der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten der Wellentypen im kraftbezogenen System. Subtrahiert man von der Summe der Transmissionskoeffizienten die Summe der Reflexionskoeffizienten, ergibt sich für die Realteile stets 1 und für die Imaginärteile stets 0. Wie bei der Wirkleistung ändert sich das Verhalten bei der kritischen Höhe nahezu sprunghaft. Während bei den Realteilen eine Verschiebung der Kurven unter Beibehaltung ihres ansteigenden bzw. abfallenden Verlaufs zu erkennen ist, würde bei den Imaginärteilen ein Umlappen bei der kritischen Höhe zu einem weiteren, stetigen Verlauf führen.

Das Grenzflächenverhalten bei gleichen Formparametern der Wellenleiter aber 60 kHz Betriebsfrequenz zeigt Abb. 5.8 für eine einfallende ϵ -Welle und Abb. 5.9 für eine einfallende η -Welle. In Abb. 5.8a ist zu erkennen, daß die durchgelassene η -Welle eine sehr untergeordnete Rolle spielt; sie ist im gesamten Bereich kaum beteiligt. Die reflektierte η -Welle dagegen übernimmt bei sehr flachen Anschlußquerschnitten fast die gesamte Wirkleistung; es tritt eine Typumwandlung auf. Erst im Bereich hoher Anschlußprofile wird auch in den angeregten Wellentyp reflektiert.

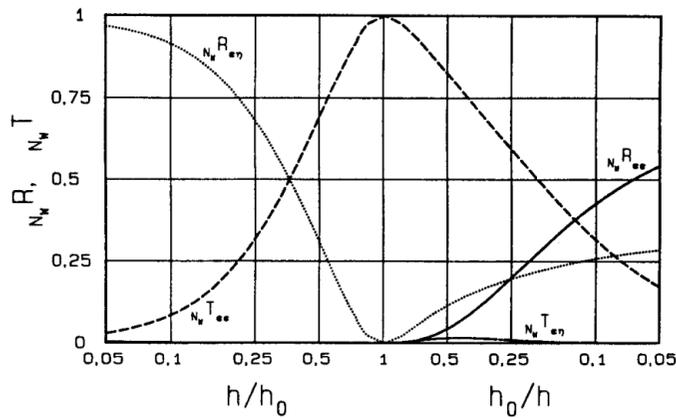


Abb. 5.8a Reflexion und Transmission von Wirkleistung an der Grenzfläche zwischen zwei Biegewellenleitern in Abhängigkeit von der Profilhöhe, Anregung einer ϵ -Welle im Wellenleiter mit $h = h_0$ bei einer Betriebsfrequenz von 60 kHz, $h_0 = 39,5$ mm

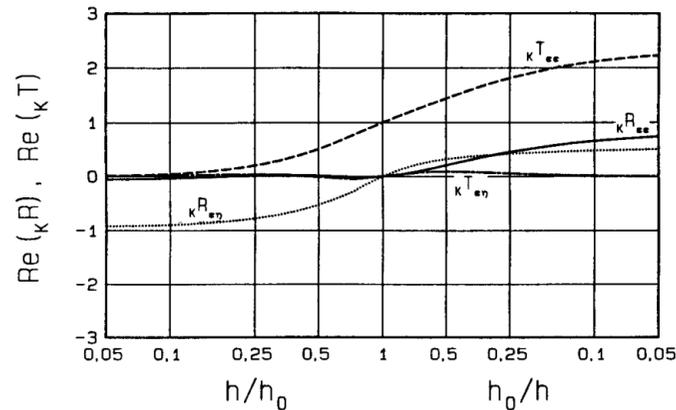


Abb. 5.8b Realteile der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten im kraftbezogenen Bezugssystem an der Grenzfläche zwischen zwei Biegewellenleitern in Abhängigkeit von der Profilhöhe, Anregung einer ϵ -Welle im Wellenleiter mit $h = h_0$ bei einer Betriebsfrequenz von 60 kHz, $h_0 = 39,5$ mm

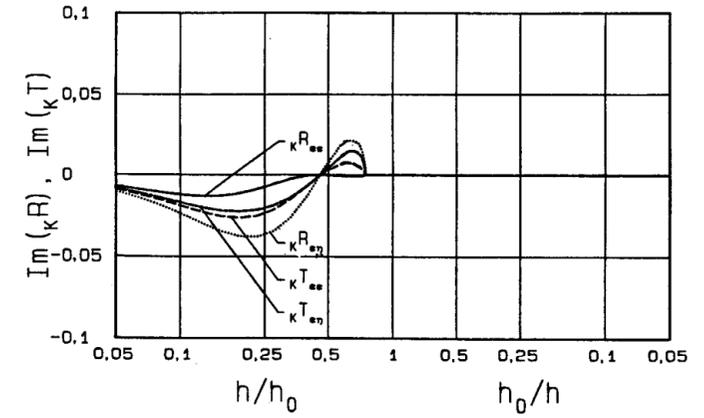


Abb. 5.8c Imaginärteile der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten im kraftbezogenen Bezugssystem an der Grenzfläche zwischen zwei Biegewellenleitern in Abhängigkeit von der Profilhöhe, Anregung einer ϵ -Welle im Wellenleiter mit $h = h_0$ bei einer Betriebsfrequenz von 60 kHz, $h_0 = 39,5$ mm

Im Gegensatz dazu steht die Wirkleistungsreflexion und -transmission bei einer einlaufenden η -Welle. Im Bereich flacher Anschlußstücke bis zur kritischen Höhe sind nur die beiden reflektierten Wellen beider Wellentypen und die transmittierte ϵ -Welle beteiligt, da bis dahin die η -Welle im Anschlußstück nicht ausbreitungsfähig ist. Der Beitrag dieses Wellentyps steigt bei der kritischen Höhe sprunghaft an, um bei der Höhe des Bezugswellenleiters die gesamte Leistung zu übernehmen; gleichzeitig bricht die Reflexion in den η -Wellentyp und damit beinahe die gesamte reflektierte Leistung zusammen. An dieser Stelle ist ein abruptes Umschalten von Leistungsreflexion auf -transmission zu beobachten.

Bei den in den Abb. 5.8b und 5.8c und Abb. 5.9b und 5.9c jeweils dargestellten Amplitudenreflexions- und Transmissionskoeffizienten ist im Verlauf der Imaginärteile deutlich der Umschaltcharakter von einer nicht ausbreitungsfähigen zu einer ausbreitungsfähigen Welle zu erkennen. Wenn alle Wellentypen reelle Wellenzahlen aufweisen, verschwinden die Imaginärteile der Koeffizienten.

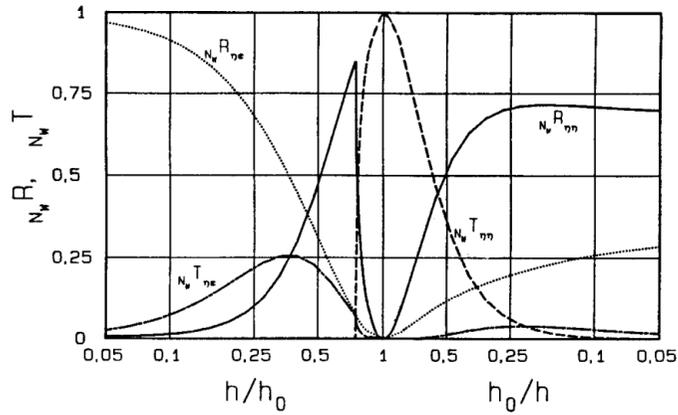


Abb. 5.9a Reflexion und Transmission von Wirkleistung an der Grenzfläche zwischen zwei Biegewellenleitern in Abhängigkeit von der Profilhöhe, Anregung einer η -Welle im Wellenleiter mit $h = h_0$ bei einer Betriebsfrequenz von 60 kHz, $h_0 = 39,5$ mm

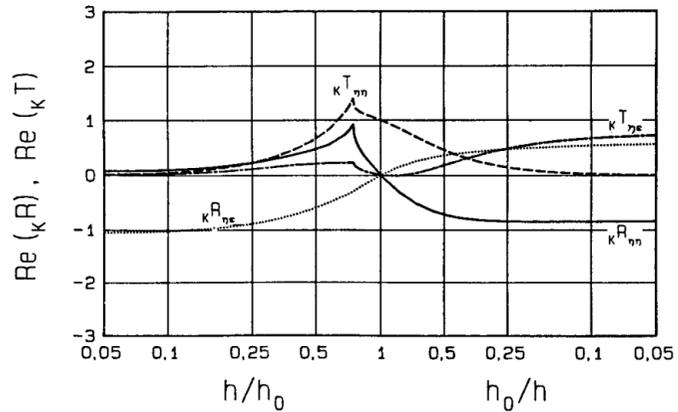


Abb. 5.9b Realteile der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten im kraftbezogenen Bezugssystem an der Grenzfläche zwischen zwei Biegewellenleitern in Abhängigkeit von der Profilhöhe, Anregung einer η -Welle im Wellenleiter mit $h = h_0$ bei einer Betriebsfrequenz von 60 kHz, $h_0 = 39,5$ mm

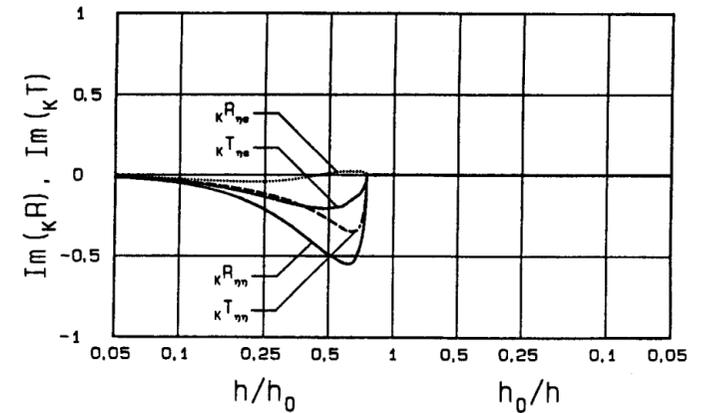


Abb. 5.9c Imaginärteile der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten im kraftbezogenen Bezugssystem an der Grenzfläche zwischen zwei Biegewellenleitern in Abhängigkeit von der Profilhöhe, Anregung einer η -Welle im Wellenleiter mit $h = h_0$ bei einer Betriebsfrequenz von 60 kHz, $h_0 = 39,5$ mm

5.6.4 Produktintegration einer differentiellen Kettenmatrix

Die Integration des Gleichungssystems läßt sich für ein finites, homogenes Leitungsstück der Länge x mit Hilfe der Propagatoren durchführen. Dabei wirkt die Produktintegration wie beim Dehnwellenleiter nur auf die Eigenwerte. Weil die vier Eigenwerte paarweise zueinander reziprok sind, reicht die Produktintegration jeweils eines zu den Wellenzahlen ε und η gehörenden Eigenwertes.

Bei finiten, homogenen Leitungsstücken lauten die Eigenwerte

$$\prod_{x=0}^x (1 - j\varepsilon dx) = e^{-j\varepsilon x} = \lambda_1(x) \tag{5.85a}$$

$$\prod_{x=0}^x (1 + j\varepsilon dx) = e^{+j\varepsilon x} = \lambda_2(x) \tag{5.85b}$$

$$\prod_{x=0}^x (1 - j\eta dx) = e^{-j\eta x} = \lambda_3(x) \tag{5.85c}$$

$$\prod_{x=0}^x (1 + j\eta dx) = e^{+j\eta x} = \lambda_4(x) \tag{5.85d}$$

Die Integration der Eigenwerte des Biegewellenleiters unterscheidet sich mathematisch nicht von der Integration beim Dehnwellenleiter. Da die Wellenzahl η imaginär sein kann, ist das Ergebnis in diesem Fall keine periodische Funktion der Leitungslänge, sondern eine exponentiell anwachsende bzw. abfallende Funktion. In Abhängigkeit von der Betriebsrichtung divergiert die Amplitude entweder des Eigenzustandes $|c_3\rangle$ oder des Eigenzustandes $|c_4\rangle$ mit der Leitungslänge. Bei Eigenschwingungen endlich langer Wellenleiter sorgt dieser Wellentyp für die Ausbildung der Nahfelder zur Erfüllung der aufgetragten Randbedingungen. Oberhalb der kritischen Wellenzahl nach Gl. 5.66 werden auch diese beiden Eigenwerte periodische Funktionen der Leitungslänge.

Mit den finiten Eigenwerten kann aus den Propagatoren des finiten Leitungsstückes die gesamte Kettenmatrix aufsummiert werden. Die finite Kettenmatrix zeigt Taf. 5.3 mit Gl. 5.86. Die Eigenwerte der Matrix $\underline{\Delta}$ sind gleichzeitig durch Gl. 5.85 gegeben. Die Eigenvektoren und die Projektoren von $\underline{\Delta}$ sind mit denen von \underline{D} identisch.

$$\underline{\underline{A}}(x) = \frac{1}{e^{2-j\eta x}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (k^2 - \eta^2) \cos \varepsilon x & jkZ \left[-\frac{1}{\varepsilon} (k^2 - \eta^2) \sin \varepsilon x + \frac{1}{\eta} (k^2 - \varepsilon^2) \sin \eta x \right] \\ -(k^2 - \varepsilon^2) \cos \eta x \end{bmatrix} & jkZ \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \sin \varepsilon x \\ -\frac{1}{\eta} \sin \eta x \end{bmatrix} & jkZ \begin{bmatrix} \cos \varepsilon x \\ -\cos \eta x \end{bmatrix} \\ j \frac{1}{kZ} \begin{bmatrix} -\varepsilon (k^2 - \eta^2) \sin \varepsilon x + \eta (k^2 - \varepsilon^2) \sin \eta x \\ -\varepsilon \sin \varepsilon x + \eta \sin \eta x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos \varepsilon x \\ -\cos \eta x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \varepsilon \sin \varepsilon x \\ +\eta \sin \eta x \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\varepsilon \sin \varepsilon x + \eta \sin \eta x \\ -\cos \varepsilon x + \cos \eta x \end{bmatrix} & jkZ \begin{bmatrix} -\cos \varepsilon x + \cos \eta x \\ \left[(k^2 - \eta^2) \cos \varepsilon x - (k^2 - \varepsilon^2) \cos \eta x \right] \end{bmatrix} & j \frac{1}{kZ} \begin{bmatrix} -\varepsilon (k^2 - \eta^2) \sin \varepsilon x + \eta (k^2 - \varepsilon^2) \sin \eta x \\ -\varepsilon (k^2 - \eta^2) \sin \varepsilon x + \eta (k^2 - \varepsilon^2) \sin \eta x \end{bmatrix} \\ j \frac{1}{kZ} \begin{bmatrix} -\cos \varepsilon x + \cos \eta x \\ \left[-\frac{1}{\varepsilon} \sin \varepsilon x + \frac{1}{\eta} \sin \eta x \right] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{\varepsilon} (k^2 - \eta^2) \sin \varepsilon x + \frac{1}{\eta} (k^2 - \varepsilon^2) \sin \eta x \\ \left[-\frac{1}{\varepsilon} (k^2 - \eta^2) \sin \varepsilon x + \frac{1}{\eta} (k^2 - \varepsilon^2) \sin \eta x \right] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (k^2 - \eta^2) \cos \varepsilon x \\ -(k^2 - \varepsilon^2) \cos \eta x \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Taf. 5.3 Kettenmatrix eines finiten, homogenen Leitungsstückes eines Biegewellenleiters (Gl. .86)

5.6.5 Zur Reziprozität des Biegewellenleiters

Die Reziprozität eines Viertores hat erhebliche Konsequenzen für die Vier-tormatrizen. Die 16 komplexwertigen Koeffizienten der Kettenmatrix sind durch die bei Viertoren gültigen 6 unabhängigen Reziprozitätsbedingungen auf 10 freie komplexwertige Parameter eingeschränkt. Einen unabhängigen Satz der Reziprozitätsbedingungen erhält man aus der Symmetrieforderung der aus der Kettenmatrix abgeleiteten generalisierten Impedanzmatrix. Unter Beachtung der Vorzeichenkonvention für Kettenmatrizen ergeben sich

$$A_{43} = -[A_{11}(A_{22}A_{43} - A_{42}A_{23}) - A_{12}(A_{21}A_{43} - A_{41}A_{23}) + A_{13}(A_{21}A_{42} - A_{41}A_{22})] = -H_{34} \quad (5.87a)$$

$$A_{41} = -[A_{11}(A_{23}A_{44} - A_{43}A_{24}) - A_{13}(A_{21}A_{44} - A_{41}A_{24}) + A_{14}(A_{21}A_{43} - A_{41}A_{23})] = -H_{32} \quad (5.87b)$$

$$A_{23} = -[A_{21}(A_{32}A_{43} - A_{42}A_{33}) - A_{22}(A_{31}A_{43} - A_{41}A_{33}) + A_{23}(A_{31}A_{42} - A_{41}A_{32})] = -H_{14} \quad (5.87c)$$

$$A_{21} = -[A_{21}(A_{33}A_{44} - A_{43}A_{34}) - A_{23}(A_{31}A_{44} - A_{41}A_{34}) + A_{24}(A_{31}A_{43} - A_{41}A_{33})] = -H_{12} \quad (5.87d)$$

$$A_{31}A_{43} - A_{41}A_{33} = -(A_{11}A_{23} - A_{21}A_{13}) \quad (5.87e)$$

$$A_{21}A_{42} - A_{41}A_{22} = -(A_{23}A_{44} - A_{43}A_{24}) \quad (5.87f)$$

In den Gln. 5.87a-d bezeichnet H_{kl} die 3 x 3 Unterdeterminante der Kettenmatrix, die man unter Beachtung des Vorzeichens erhält, wenn man die Zeile k und die Spalte l der Kettenmatrix streicht.

In der Kettenmatrixform des Gleichungssystems finden sich diese Bedingungen in einer Forderung für die Determinante von $\underline{\Delta}$, in Forderungen für ihre 3 x 3 Unterdeterminanten, in Identitätsforderungen für 2 x 2 Unterdeterminanten und in Bedingungen für Invarianten der Matrix $\underline{\Delta}$ in Beziehungen zu den Eigenwerten wieder. Die verschiedenen Forderungen für die Reziprozität sind nicht unabhängig voneinander, stellen aber Hilfskalküle dar, mit denen numerische und analytische Rechnungen unterstützt werden können, und bieten nicht zuletzt einen Ansatz, physikalische Interpretationen der Reziprozität zu beleuchten. Deshalb sollen an dieser Stelle einige interessante Konsequenzen der Reziprozität diskutiert werden. In Anh. C sind die oben angesprochenen, notwendigen Reziprozitätsbedingungen für 2 x 2 Unterdeterminanten der Kettenmatrix eines allgemeinen Viertores zusammengestellt.

Man kann die Reziprozitätsprüfung auch durchführen, indem man jeweils zwei Tore durch torspezifische Impedanzen abschließt und von der Kettenmatrix des verbleibenden Zweitores Reziprozität fordert. Führt man diesen Test für die Torkombinationen

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{K}_1 \\ \bar{V}_1 \end{bmatrix} &\iff \begin{bmatrix} \bar{K}_0 \\ \bar{V}_0 \end{bmatrix} & \frac{\bar{M}_1}{\bar{Q}_1} = k & \frac{\bar{M}_0}{\bar{V}_0} = c \\ \begin{bmatrix} \bar{K}_1 \\ \bar{V}_1 \end{bmatrix} &\iff \begin{bmatrix} \bar{M}_0 \\ \bar{Q}_0 \end{bmatrix} & \frac{\bar{M}_1}{\bar{Q}_1} = k & \frac{\bar{K}_0}{\bar{V}_0} = c \\ \begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{Q}_1 \end{bmatrix} &\iff \begin{bmatrix} \bar{M}_0 \\ \bar{Q}_0 \end{bmatrix} & \frac{\bar{K}_1}{\bar{V}_1} = k & \frac{\bar{K}_0}{\bar{V}_0} = c \\ \begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{Q}_1 \end{bmatrix} &\iff \begin{bmatrix} \bar{K}_0 \\ \bar{V}_0 \end{bmatrix} & \frac{\bar{K}_1}{\bar{V}_1} = k & \frac{\bar{M}_0}{\bar{V}_0} = c \end{aligned}$$

durch und verlangt, daß die Determinante der jeweiligen Zweitor-Kettenmatrix 1 ist, erhält man insgesamt den vollständigen Satz der Beziehungen zwischen den Unterdeterminanten H_{kl} und den Koeffizienten der Matrix $\underline{\Delta}$, die man in Matrixform in Gl. 5.88 schreiben kann.

$$\underline{\underline{\Delta}} = \begin{bmatrix} H_{22} & -H_{21} & H_{24} & -H_{23} \\ -H_{12} & H_{11} & -H_{14} & H_{13} \\ H_{42} & -H_{41} & H_{44} & -H_{43} \\ -H_{32} & H_{31} & -H_{34} & H_{33} \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen läßt sich zunächst nach einiger Zwischenrechnung allgemein zeigen, daß für eine reziproke 4 x 4 Kettenmatrix gilt

$$\det(\underline{\underline{\Delta}}) = 1 \quad (5.89)$$

Entwickelt man die Determinante von $\underline{\Delta}$ nach einer Zeile oder Spalte, erlaubt Gl. 5.88 die Zurückführung der Determinanten auf die Summe von 4 einfachen Produkten von Elementen in $\underline{\Delta}$; (dies ist bei der numerischen Rechnung von besonderer Bedeutung, weil es neben einer Reduktion der Rechenzeit auch die bei sehr großen Zahlen problembehaftete Produktbildung mit vier Koeffizienten vermeidet; schließlich ließe sich durch Mehrfachanwendung dieses Kalküls prüfen, wo gegebenenfalls kritische numerische Fehler in einem Rechenlauf aufgetreten sind.)

• *Anmerkung*

Die Determinantenbedingung ist die Beziehung, die in der Literatur als Reziprozitätsbedingung herangezogen wird. Sie wird z.B. in [106] aus der Forderung abgeleitet, daß die reziproken Übertragungsmatrizen die gleichen Eigenwerte haben müssen, wie die Übertragungsmatrix selbst. Dies ist eine notwendige, aber entscheidend schwächere Reziprozitätsforderung, als die Forderung nach reziproker Übertragung zwischen allen beteiligten Toren eines n-Tores.

Unter Benutzung der Reziprozitätsbedingungen kann man nun leicht die inverse Matrix $\underline{\Delta}^{-1}$ bilden. Es gilt allgemein für quadratische Matrizen

$$\underline{\Delta} \operatorname{adj}(\underline{\Delta}) = \det(\underline{\Delta}) \underline{E} \tag{5.90}$$

$$\operatorname{adj}(\underline{\Delta}) = \underline{H}^T \tag{5.91}$$

In Gl. 5.90 und Gl. 5.91 ist $\operatorname{adj}(\underline{\Delta})$ die Adjungierte von $\underline{\Delta}$ und \underline{E} die Einheitsmatrix.

Da $\det(\underline{\Delta}) = 1$ gilt, folgt

$$\underline{\Delta}^{-1} = \underline{H}^T \tag{5.92}$$

Durch die Reziprozitätsbeziehungen, Gl. 5.88, sind die Elemente H_{kl} mit den Elementen der Kettenmatrix verknüpft. Es gilt für die Inverse von $\underline{\Delta}$

$$\underline{\Delta}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} & A_{42} & -A_{32} \\ -A_{21} & A_{11} & -A_{41} & A_{31} \\ A_{24} & -A_{14} & A_{44} & -A_{34} \\ -A_{23} & A_{13} & -A_{43} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{5.93}$$

Wie beim Dehnwellenleiter lassen sich zum Schluß dieser Betrachtungen noch Aussagen aus dem charakteristischen Polynom der Kettenmatrix gewinnen. Es gilt für jede 4 x 4 Matrix

$$\lambda^4 - \operatorname{Sp}(\underline{\Delta}) \lambda^3 + c \lambda^2 + k \lambda + \det(\underline{\Delta}) = 0 \tag{5.94}$$

mit der Bedeutung

$$\operatorname{Sp}(\underline{\Delta}) = \sum_{k=1}^4 A_{kk} \tag{5.95}$$

Wegen $\det(\underline{\Delta}) = 1$ ist wiederum der absolute Term dieses Polynoms 1. Dies bedingt, daß das Produkt aller Eigenwerte der Matrix selbst 1 sein muß. Diese Reziprozitätsbedingung wird vom Wellenleiter erfüllt, wenn seine Eigenwerte paarweise reziprok zueinander sind. Daraus kann man ähnlich wie beim Dehnwellenleiter physikalisch ableiten, daß bei einem reziproken Wellenleiter zu jedem hinlaufenden Wellentyp ein gleicher rücklaufender Wellentyp mit gleicher Wellenlänge existiert.

Setzt man die Eigenwerte dieser Bedingung entsprechend an,

$$\lambda_2 = \lambda_1^{-1} \tag{5.96a} \quad \lambda_4 = \lambda_3^{-1} \tag{5.96b}$$

erhält man über

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_1^{-1})(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_3^{-1}) = 0 \tag{5.97}$$

$$\lambda^4 - \left[\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} + \lambda_3 + \frac{1}{\lambda_3} \right] \lambda^3 + \left[2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \lambda_1 \lambda_3 + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_3} \right] \lambda^2 - \left[\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} + \lambda_3 + \frac{1}{\lambda_3} \right] \lambda + 1 = 0 \tag{5.98}$$

eine Verknüpfung der Spur der Kettenmatrix mit der Summe der Eigenwerte

$$\sum_{k=1}^4 \lambda_k = \operatorname{Sp}(\underline{\Delta}) \tag{5.99}$$

6 Zusammenfassung

Die bekannten Konzepte zur Beschreibung der Biegung wurden anhand einer systematischen Zuordnung zu empirischen Bildern der Biegung bzw. elastodynamischen Theorien vorgestellt. Bei der Diskussion der Konzepte wurde herausgearbeitet, in welcher Weise bei der Entwicklung von Biegemodellen sowohl im Bereich der Bilder der Balkenbiegung als auch im Bereich der axiomatischen elastodynamischen Theorien Vereinfachungen und Vernachlässigungen erforderlich werden, die die Allgemeingültigkeit der Modelle einschränken. Die Modellbildung führte - unter Berücksichtigung dieser Einschränkungen - unabhängig von der zugrunde gelegten Theorie auf eindimensionale Modelle, die die Biegung mit den klassischen Kenngrößen beschreiben. Es wurde begründet, warum mehrdimensionale Modelle keine Steigerung an Zuverlässigkeit (Prädiktionskraft) bei der Behandlung dynamischer Biegevorgänge auf Wellenleitern erwarten lassen.

Experimentelle Untersuchungen an einem Balken mit typischen Abmessungen eines Ultraschall-Biegewellenleiters zeigen auf, daß ein eindimensionales Schubelastisches Modell mit Berücksichtigung der Drehträgheit eine hinreichend zuverlässige Beschreibung des Übertragungsverhaltens von Biegewellenleitern erlaubt. Die Meßergebnisse bestätigten die Vorhersagen eines solchen Modells sowohl für die Resonanzfrequenzen als auch für die Schwingungsformen. Die von den Modellen vorhergesagte parallele Existenz von zwei unabhängigen, ausbreitungsfähigen Biegewellen oberhalb einer Grenzfrequenz konnte nachgewiesen werden. Auch oberhalb dieser Grenzfrequenz stimmen die Modellwerte und die Meßwerte sowohl für die Resonanzfrequenzen als auch für die Schwingungsformen qualitativ überein.

Die Experimente belegten, daß der pragmatische Ansatz eines TIMOSHENKO-Koeffizienten zur Modifizierung der Schubsteifigkeit in engen Frequenzbereichen quantitativ zu einer besseren Übereinstimmung zwischen dem Modell und dem Experiment führte. Die Untersuchungen zeigten, daß die Berechnung von TIMOSHENKO-Koeffizienten aus der Kontinuumsstheorie an der Realität vorbeigeht.

Die Diskussion der methodischen Ansätze der Rechenverfahren ergab, daß nur das Verfahren mit Übertragungsmatrizen bzw. die Kettenmatrixmethode den sachgerechten und zuverlässigen Ansatz zur Berechnung von Biegewellenleitern in der Ultraschall-Energetechnik bieten.

Es wurde eine Erweiterung der Kettenmatrixmethode zu einer Theorie gekoppelter Leitungen vorgestellt. In den Ansätzen dieser Theorie wird das Übertragungsverhalten von Biegewellenleitern vollständig und übersichtlich formulierbar. Bei dieser Methode wird die Reflexion und die Transmission der Feldgrößen und des Energieflusses an der Grenzfläche zwischen zwei Leitungsstücken auf einen Metrikvergleich zwischen den kontragredienten Eigenvektorsystemen der Kettenmatrizen der beteiligten Leitungsstücke zurückgeführt. Die Methode eignet sich besonders für numerische Rechenverfahren, die der anwendungsorientierten Optimierung von Biegewellenleitersystemen dienen.

7 Literaturverzeichnis

- /1/ EISNER, E.: "Design of Flexural Vibrators", Journal of the Acoustical Society of America 40(1966)S.773-775
- /2/ ROZENBERG, L.D.: "Sources of High-Intensity Ultrasound", Vol.2, Plenum Press, New York 1969
- /3/ CREMER, L.; HECKL, M.: "Körperschall", Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1967.
- /4/ MEEKER, T.R.; MEITZLER, A.H.: "Guided Wave Propagation in Elongated Cylinders and Plates" in MASON W.P.: "Physical Acoustics" Vol.IA, Academic Press, New York-London 1964
- /5/ EISNER, E.: "The Design of Resonant Vibrators" in MASON W.P.: "Physical Acoustics" Vol.IB, Academic Press, New York-London 1964
- /6/ HERBERTZ, J.: "Zur Charakterisierung von Übertragungselementen der akustischen Energietechnik", Fortschritte der Akustik - DAGA'85, Bad Honnef: DPG-GmbH 1985
- /7/ WAGNER, K.W.: "Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen", Dietrich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1947
- /8/ HERBERTZ, J.; HIRSCH, K.-W.: "Zur Berechnung von Ultraschall-Schwingern mit Longitudinal-Biegekopplung", Fortschritte der Akustik - FASE/DAGA'82, Bad Honnef: DPG-GmbH 1982
- /9/ HERBERTZ, J.: "Berechnung des Schwingungsverhaltens ringförmiger Biegeplatten", Fortschritte der Akustik - DAGA'86, Bad Honnef: DPG-GmbH 1986
- /10/ LEISSA, A.W.: "Recent Research in Plate Vibrations: Classical Theory", The Shock and Vibration Digest 9(1977)S.13-24
- /11/ EULER, L.: "Methodus inveniende lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes", Additamentum I: "De curvis elasticis", Nachdruck des Originals, herausgegeben von STÜSSI, F. und FARRE, H., Schweizerische Naturwissenschaftliche Gesellschaft
- /12/ RAYLEIGH, J.W.S.: "The Theory of Sound", Vol.I, Dover Publications, New York 1878, Reprint 1948
- /13/ TIMOSHENKO, S.P.: "On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibration of Prismatic Bars", Philosophical Magazine 41(1921)S.744-74
- /14/ COWPER, G.R.: "The Shear Coefficient in TIMOSHENKO's Beam Theory", Journal of Applied Mechanics 33(1966)6,S.335-340
- /15/ POCHHAMMER, L.: "Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszyylinder", CRELLE's Journal für die reine und angewandte Mathematik 81(1876)S.324-336
- /16/ CHREE, C.: "The Equations of an Isotropic Elastic Solid in Polar and Cylindrical Coordinates, Their Solutions and Applications", Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 14(1889)S.250-289
- /17/ KANEKO, T.: "On TIMOSHENKO's Correction for Shear in Vibrating Beams", Journal of Physics D: Applied Physics (1975)8,S.1927-1936
- /18/ TIMOSHENKO, S.P.: "On the Transverse Vibration of Bars of Uniform Cross-Section", Philosophical Magazine 43(1922)S.125-131
- /19/ GOENS, E.: "Über die Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Stäben mit Hilfe von Biegeschwingungen", Annalen der Physik 11(1931)6,S.649-678
- /20/ OLSON, R.G.: "Die tatsächliche Durchbiegung des gebogenen Balkens", Stahlbau 7(1934)2,S.13-14
- /21/ DAVIES, R.M.: "The Effect of Shearing of the Bar", Philosophical Magazine 23(1937)S.1129-1145
- /22/ ROARK, R.J.: "Formulas of Stress and Strain", McGraw-Hill, New York 1938, 3. Auflage 1954, S.119-121
- /23/ PICKETT, G.: "Flexural Vibrations of Unstrained Cylinders and Disks", Journal of Applied Physics 16(1945)S.820-831
- /24/ MINDLIN, R.D.: "Thickness-Shear and Flexural Vibrations of Crystal Plates", Journal of Applied Physics 22(1951)S.316-323
- /25/ GOODMAN, L.E.; SUTHERLAND, J.G.: "Natural Frequencies of Continuous Beams of Uniform Span Length", Journal of Applied Mechanics 18(1951)S.217-218
- /26/ MINDLIN, R.D.: "Thickness-Shear and Flexural Vibrations of Crystal Plates", Journal of Applied Physics 23(1952)S.83-88

- /27/ MINDLIN, R.D.; DERESIEWICZ, H.: "TIMOSHENKO Shear Coefficient for Flexural Vibrations of Beams", Technical Report Nr.10, ONR Projekt 064-388, Department of Civil Engineering, Columbia University, New York 1953
- /28/ HIGUCHI, S.; SAITO, H.; HASHIMOTO, C.: "A Study of the Approximate Theory of an Elastic Thick Beam", Canadian Journal of Physics 35(1957)S.757-765
- /29/ HEARMON, R.F.S.: "The Influence of Shear and Rotatory Inertia on the Free Flexural Vibration of Wooden Beams", British Journal of Applied Physics 9(1958)S.381-388
- /30/ SPINNER, S.; REICHARD, T.W.; TEFFT, W.E.: "A Comparison of Experimental and Theoretical Relations Between YOUNG's Modulus and the Flexural and Longitudinal Resonance Frequencies of Uniform Bars", Journal of Research NBS 64 A(1960)S.147-155
- /31/ TEFFT, W.E.: "Numerical Solution of the Frequency Equations for the Flexural Vibration of Cylindrical Rods", Journal of Research NBS 64 B(1960)S.237-242
- /32/ ZEMANEK, J.; RUDNICK, I.: "Attenuation and Dispersion of Elastic Waves in a Cylindrical Bar", Journal of the Acoustical Society of America 33(1961)S.1283-1288
- /33/ NEDERVEEN, C.J.; SCHWARZL, F.R.: "Corrections for Shear and Rotatory Inertia on Flexural Vibrations of Beams", British Journal of Applied Physics 15(1964)S.323-325
- /34/ SCHNEIDER, H.: "Verfahren zur Berechnung von Elastizitäts- und Schubmodul aus Eigenfrequenzen stabförmiger Proben", Materialprüfung 8(1966)S.169-174
- / 34/ HARDIE, D.; PARKINS, R.N.: "A Study of the Errors Due to Shear and Rotatory Inertia in the Determination of YOUNG's Modulus by Flexural Vibrations", Journal of Physics D: Journal of Applied Physics 1(1968)S.77-85
- /36/ HART, S.: "Comments on the Paper 'A Study of the Errors Due to Shear and Rotatory Inertia in the Determination of YOUNG's Modulus by Flexural Vibrations'", Journal of Physics D: Journal of Applied Physics 1(1968)S.1763-1766
- /37/ COWPER, G.R.: "On the Accuracy of TIMOSHENKO's Beam Theory", Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers 94(1968)6,S.1447-1453

- /38/ SPENCE, G.B.; SELDIN, E.J.: "Sonic Resonances of a Bar and Compound Torsion Oscillator", Journal of Applied Physics 41(1970)8,S.3383-3389
- /39/ TANJI, Y.; MORIYA, H.; SHIRAKAWA Y.; TAMATE, O.: "Evaluation of Precise Measurements of YOUNG's Modulus and Shear Modulus by the Electrostatic Driving Method", Journal of the Japan Institute of Metals 36(1972)S.368-373
- /40/ RITCHIE, I.G.: "Improved Resonant Bar Techniques for the Measurement of Dynamic Elastic Moduli and a Test of the TIMOSHENKO Beam Theory", Journal of Sound and Vibration 31(1973)S.453-468
- /41/ HSU, Y.: "The Shear Coefficient of Beams of Circular Cross Section", Journal of Applied Mechanics 42(1975)S.226-228
- /42/ DOWNS, B.: "Transverse Vibration of a Uniform, Simply Supported TIMOSHENKO Beam Without Transverse Deflection", Journal of Applied Mechanics 43(1976)S.671-674
- /43/ STEPHEN, N.G.: "On the Variation of TIMOSHENKO's Shear Coefficient with Frequency", Journal of Applied Mechanics 45(1978),S.695-697
- /44/ STEPHEN, N.G.; LEVINSON, M.: "A Second Order Beam Theory", Journal of Sound and Vibration 67(1979)3,S.293-305
- /45/ STEPHEN, N.G.: "TIMOSHENKO's Shear Coefficient from a Beam Subjected to Gravity Load", Journal of Applied Mechanics 47(1980)S.121-127
- /46/ KRISHNAN, A.; SRINIVASULU, N.: "Some Studies on Vibration of TIMOSHENKO Beams", Journal of Sound and Vibration 100(1985)3,S.445-451
- /47/ AALAMI, B.; ATZORI, B.: "Flexural Vibrations and TIMOSHENKO's Beam Theory", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 12(1974)S.679-685
- /48/ MYKLESTAD, N.O.: "A New Method of Calculating Natural Modes of Uncoupled Bending Vibration of Airplane Wings and Other Types of Beams", Journal of the Aeronautical Sciences (1944)4,S.153-162
- /49/ RAO, S.S.: "Natural Vibrations of Systems of Elastically Connected TIMOSHENKO Beams", Journal of the Acoustical Society of America 55(1974)6,S.1232-1237

- /50/ REICHARDT, W.: "Grundlagen der Elektroakustik", Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 3. Auflage, Leipzig 1960
- /51/ LENK, A.: "Elektromechanische Systeme", Band 1: "Systeme mit konzentrierten Parametern", VEB Verlag Technik, Berlin 1971
- /52/ MARGUERRE, K.; WÖLFEL, H.: "Technische Schwingungslehre", Bibliographisches Institut - Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich 1979
- /53/ THOMAS, D.L.; WILSON, J.M.; WILSON, R.R.: "TIMOSHENKO Beam Finite Elements", Journal of Sound and Vibration 31(1973)3, S.315-330
- /54/ LEIPHOLZ, H.: "Einführung in die Elastizitätstheorie", Verlag G. Braun GmbH, Karlsruhe 1968
- /55/ BUDO, A.: "Theoretische Mechanik", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967
- /56/ TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J.N.: "Theory of Elasticity", McGraw-Hill, New York-Toronto-London-Tokio 1951
- /57/ LOVE, A.E.H.: "Lehrbuch der Elastizität", Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig-Berlin 1907
- /58/ v. MISES, R.: "On Saint VENANT's Principle", Bulletin of the American Mathematical Society 51(1945)S.555-562
- /59/ FÖRSTER, F.: "Ein neues Meßverfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls und der Dämpfung", Zeitschrift für Metallkunde 29(1937)4, S.109-115
- /60/ HERBERTZ, J.; HIRSCH, K.-W.: "Transformationsverhältnis und Resonanzfrequenz von Ultraschall-Schnelletransformatoren", Fortschritte der Akustik - DAGA'80, VDE Verlag Berlin 1980
- /61/ FILON, L.N.G.: "On an Approximate Solution for the Bending of a Beam of Rectangular Cross-Section Under Any System of Load, With Special Reference to Points of Concentrated or Discontinuous Loading", Philosophical Transactions of the Royal Society A201(1903)S.63-155
- /62/ YIH-HSING, P.; MINDLIN, R.D.: "Dispersion of Flexural Waves in an Elastic, Circular Cylinder", Journal of Applied Mechanics 27(1960)S.513-520

- /63/ GAZIS, D.C.; MINDLIN, R.D.: "Influence of Width on Velocities of Long Waves in Plates", Journal of Applied Mechanics 24(1957)S.541-546
- /64/ v. KARMAN, T.: "Über die Grundlagen der Balkentheorie", Abhandlungen des Aerodynamischen Instituts der Technischen Hochschule Aachen 7(1927)S.3-10
- /65/ SEEWALD, F.: "Die Spannungen und Formänderungen von Balken mit rechteckigem Querschnitt", Abhandlungen des Aerodynamischen Instituts der Technischen Hochschule Aachen 7(1927)S.11-33
- /66/ PRIMAKOFF, H.; FOLDY, L.L.: "A General Theory of Passive Linear Electroacoustic Transducers and the Electroacoustic Reciprocity Theorem. II", Journal of the Acoustical Society of America 19(1947)1, S.50-58
- /67/ SCHÄFER, B.: "Free Vibrations of a Gravity-Loaded Clamped-Free Bar", Ingenieur-Archiv 55(1985)S.66-80
- /68/ TORVIK, P.J.; WADE, J.E.: "Influence of a Surface Mass Distribution on the Motion of Bars", Journal of the Acoustical Society of America 52(1971)1, S.935-943
- /69/ BOLEY, B.A.; TOLINS, I.S.: "On the Stress and Deflections of Rectangular Beams", Journal of Applied Mechanics 23(1956)S.339-342
- /70/ SAITO, H.; OTOMI, K.: "Vibration and Stability of Elastically Supported Beams Carrying an Attached Mass Under Axial and Tangential Loads", Journal of Sound and Vibration 62(1979)2, S.257-266
- /71/ KING, J.L.: "The Free Transverse Vibrations of Anisotropic Beams", Journal of Sound and Vibration 98(1985)4, S.575-585
- /72/ CHU, H.-N.; HERRMANN, G.: "Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates", Journal of Applied Mechanics 23(1956)S.532-540
- /73/ LEISSA, A.W.: "Vibration of Plates", Report NASA SP-160, National Aeronautics and Space Administration, 1969
- /74/ HERBERTZ, J.; JAIN, S.: "Zur meßtechnischen Charakterisierung von Ultraschall-Leistungswandlern", Fortschritte der Akustik - DAGA'85, Bad Honnef: DPG-GmbH 1985, S.803-806

- /75/ MORSE, R.W.: "Dispersion of Compressional Waves in Isotropic Rods of Rectangular Cross Section", Journal of the Acoustical Society of America 20(1948)S.833-838
- /76/ MORSE, R.W.: "The Velocity of Compressional Waves in Rods of Rectangular Cross Section", Journal of the Acoustical Society of America 22(1950)S.219-223
- /77/ MEDICK, M.A.: "On Dispersion of Longitudinal Waves in Rectangular Bars", Journal of Applied Mechanics 34(1967)S.714-717
- /78/ HUANG, T.C.: "The Effect of Rotatory Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams With Simple End Conditions", Journal of Applied Mechanics 28(1961)S.579-584
- /79/ DOLPH, C.L.: "On the TIMOSHENKO Theory of Transverse Beam Vibration", Quarterly of Applied Mechanics 12(1954)2,S.175-187
- /80/ HOWE, C.E.; HOWE, R.M.; RAUCH, L.L.: "Application of the Electronic Differential Analyzer to the Oszillation of Beams, Including Shear and Rotary Inertia", Report UMM-67, 1951, Engineering Research Institute, University of Michigan
- /81/ BERNOULLI, J.: "Von der Krümmung des elastischen Bandes", Auszug aus der Abhandlung: Acta eruditorum, Leipzig, Juni 1694, in 'Abhandlungen über das Gleichgewicht und die Schwingungen der ebenen elastischen Kurven', J. BERNOULLI (1691, 1694, 1695), und L. EULER (1744), übersetzt und herausgegeben von H. LINSENBARTH, Verlag W. Engelmann, Leipzig 1910
- /82/ WEIGAND, A.: "Einführung in die Berechnung mechanischer Schwingungen", Bd.III, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1962
- /83/ GAINES, J.H.; VOLTERRA, E.: "Transverse Vibration of Cantilever Bars of Variable Cross Section", Journal of the Acoustical Society of America 39(1966)S.219-223
- /84/ SCHWARZ, H.R.: "Methode der finiten Elemente", Verlag B.G. Teubner, Stuttgart 1984
- /85/ HERRMANN, G.: "Forced Motion of TIMOSHENKO Beams", Journal of Applied Mechanics 35(1968)S.53-56
- /86/ MEAD, D.J., PARTHAN, S.: "Free Wave Propagation in Two-Dimensional Periodic Plates", Journal of Sound and Vibration 64(1979)3,S.325-348

- /87/ WRINCH, D.: "On the Lateral Vibrations of Bars of Conical Type", Proceedings of the Royal Society A101(1922)S.493-508
- /88/ CRANCH, E.T.; ADLER, A.A.: "Bending Vibrations of Variable Section Beams", Journal of Applied Mechanics 23(1956)S.103-108
- /89/ IRIE, T.; YAMADA, G.; TAKASHI, I.: "Determination of the Steady State Response of a TIMOSHENKO Beam of Varying Cross-Section by Use of the Spline Interpolation Technique", Journal of Sound and Vibration 63(1979)2,S.287-295
- /90/ MARGUERRE, K.; UHRIG, R.: "Berechnung vielgliedriger Gelenkketten", Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 44(1964)S.1-21
- /91/ MARGUERRE, K.: "Matrices of Transmission in Beam Problems", Progress in Solid Mechanics, Amsterdam, North Holland Publication Company 1960, S.61-82
- /92/ FUHRKE, H.: "Bestimmung von Balkenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls", Ingenieur-Archiv 23(1955)S.329-348
- /93/ PESTEL, E.C.; LECKIE, F.A.: "Matrix Methods in Elastomechanics", McGraw-Hill, New York-San Francisco-Toronto-London 1963
- /94/ HIRSCH, K.-W.; HERBERTZ, J.: "Übertragungseigenschaften von verlustbehafteten BiegeWellenleitern", Fortschritte der Akustik - DAGA'85, Bad Honnef: DPG-GmbH 1985, S.659-662
- /95/ PESTEL, E.; MAHREHOLTZ, O.: "Zum numerischen Problem der Eigenwertbestimmung mit Übertragungsmatrizen", Ingenieur-Archiv 28(1959)S.255-262
- /96/ PESTEL, E.: "Ein allgemeines Verfahren zur Berechnung freier und erzwungener Schwingungen von Stabwerken", Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft VI, 1954
- /97/ KERSTEN, R.; FALK, S.: "Das Reduktionsverfahren der Baustatik. Mit einer Anleitung zum Programmieren", 2. Auflage, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1982
- /98/ MARGUERRE, K.: "Vibration and Stability Problems of Beams Treated by Matrices", Journal of Mathematical Physics 35(1956)S.28-43
- /99/ DOWNS, B.: "Transverse Vibrations of Cantilever Beams Having Unequal Breadth and Depth Tapers", Journal of Applied Mechanics 44(1977)S.737-742

- /100/ STEPHEN, N.G.: "Comments on 'A Note on the Vibrations of Restrained Beams and Rods With Point Masses'", Journal of Sound and Vibration 100(1985)1, S.149-150
- /101/ SHASTRY, B.P.; VENKATESWARA RAO, G.: "Free Vibrations of Short Beams", Journal of Sound and Vibration 100(1985)2, S.305-308
- /102/ SONI, S.R.: "Vibrations of Beams Made of Variable Thickness Layer", Journal of Sound and Vibration 65(1979)1, S.75-84
- /103/ LEES, A.W.; THOMAS, D.L.: "Modal Hierarchical TIMOSHENKO Beam Finite Elements", Journal of Sound and Vibration 99(1985)4, S.455-461
- /104/ LICHNEROWICZ, A.: "Einführung in die Tensoranalysis", Bibliographisches Institut, Mannheim 1966
- /105/ HIRSCH, K.-W.; HERBERTZ, J.: "Zur Reziprozität in der akustischen Leitungstheorie", Fortschritte der Akustik - DAGA'87, Bad Honnef: DPG-GmbH 1987
- /106/ UHRIG, R.: "Elastostatik und Elastokinetik in Matrixschreibweise", Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1973
- /107/ HERBERTZ, J.; POHLMAN, R.: "Ein elektrodynamischer Wandler zur berührungslosen Erregung und Messung von Schwingungen in elektrisch leitenden Substanzen", 5. Congres International D'Acoustique, Liege 1965
- /108/ WEYL, H.: "Gruppentheorie und Quantenmechanik", Wissenschaftliche Buchgemeinschaft Darmstadt 1977, Nachdruck des 1931 erschienenen Werkes

8 Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

a_k		Normierungsfaktor
\mathbf{A}		generalisierte Kettenmatrix
b		Breite des Balkens
$ \mathbf{b}\rangle$		kogredienter Beobachtungsvektor
B	Pa m^4	Biegesteifigkeit
B_E	Pa m^4	EULER'sche Biegesteifigkeit
\mathbf{C}		allgemeine Matrix
$ \mathbf{c}\rangle$		kogredienter Eigenvektor
$\langle \mathbf{c} $		kontragredienter Eigenvektor
c		allgemeine Konstante
c_R	1	RAYLEIGH-Funktion
C_R	1	RAYLEIGH-Funktion
d	m	Durchmesser
D	Pa	Plattenmodul
D_Y	Pa	Plattenmodul als Materialkonstante
\mathbf{D}		differentielle Kettenmatrix
\mathbf{e}_i		Einheitsvektor
E	Pa	Elastizitätsmodul
E_Y	Pa	Elastizitätsmodul als Materialkonstante (YOUNG'scher Modul)
\mathbf{E}		Einheitsmatrix
f	Hz	Frequenz
f_N	Hz	Bezugsfrequenz
f_0	Hz	Resonanzfrequenz
F	m^2	Querschnittsfläche des Balkens

g	1	Güte
G	Pa	Schubmodul
G_Y	Pa	Schubmodul als Materialkonstante
\underline{G}		Grenzflächenmatrix
h	m	Höhe des Balkens
h		Amplitude einer hinlaufenden Welle
\underline{H}		transponiert adjungierte Matrix zu \underline{A}
i	1	Index
I	m^4	Flächenträgheitsmoment des Balkenquerschnitts um die y-Achse
j		imaginäre Einheit
k	m^{-1}	Wellenzahl
k	1	Index
k		allgemeine Konstante
K	N	Querkraft
l	m	Länge des Balkens
l	1	Index
m	1	Index
m_i		Normierungsfaktor
M	Nm	Drehmoment
n	1	Index
N_w	Watt	Wirkleistung
\underline{P}		Projektor
q	1	Integrationskonstante
Q		Wirkleistungsoperator
r	m	Trägheitsradius
r		Amplitude einer rücklaufenden Welle

\underline{r}		allgemeiner Vektor
R	1	Reflexionskoeffizient
S_R	1	RAYLEIGH-Funktion
S	$Pa\ m^2$	Schubsteifigkeit
S		Übertragungsfunktion
S_R	1	RAYLEIGH-Funktion
t	s	Zeit
T	K	absolute Temperatur
T	1	Transmissionskoeffizient
T_K	1	TIMOSHENKO-Koeffizient
\underline{T}		Propagator
u	m	Verschiebung in x-Richtung
v	m	Verschiebung in y-Richtung
V	ms^{-1}	Querschnelle
w	m	Verschiebung in z-Richtung
x	m	Ortskoordinate
X	1	Realteil der Meßwerte der normierten Impedanz
X_i		bei Zeitumkehr vorzeichenhaltende Klemmengröße
y	m	Ortskoordinate
Y	1	Imaginärteil der Meßwerte der normierten Impedanz
Y_i		bei Zeitumkehr vorzeichenwechselnde Klemmengröße
z	m	Ortskoordinate
Z	$kg\ s^{-1}$	akustische Impedanz
\underline{Z}		generalisierte Impedanzmatrix

Anhang

A Modalanalyse eines Wellenleiters

A 1 Beschreibung des Meßplatzes

Mit dem in Abb. A.1 schematisch dargestellten Meßplatz wird die Modalanalyse eines mit der Randbedingung frei-frei schwingenden Wellenleiters durchgeführt.

Ein als Sender betriebener elektroakustischer Wandler (Sendesonde) prägt in die Oberfläche des Wellenleiters eine harmonische Wechselkraft bei der Meßfrequenz des Pegelmessers ein. Ein als Empfänger betriebener elektroakustischer Wandler (Empfangs-sonde) nimmt die Amplitudenantwort des Wellenleiters an der gewählten Position auf. Dem Pegelmesser wird das Signal der Sendesonde als Referenzsignal und das aufbereitete Signal der Empfangs-sonde als

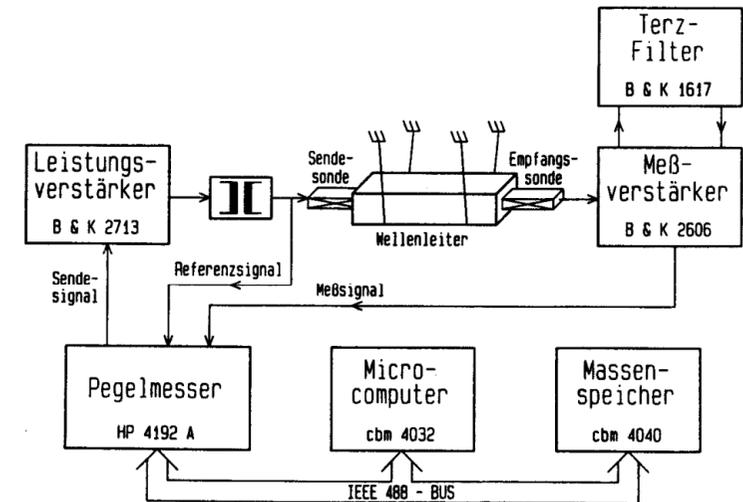


Abb. A.1 Blockschaltbild des Meßplatzes

β	1	Biegewinkel
γ	1	Scherwinkel
ϵ	m^{-1}	BiegeWellenzahl
η	m^{-1}	BiegeWellenzahl
κ	m^{-1}	Wellenzahl
λ	1	Eigenwert einer Kettenmatrix
ν	1	Neigung
π	1	Kreiszahl
ψ	1	Drehwinkel
ω	s^{-1}	Kreisfrequenz
Ω	s^{-1}	Drehgeschwindigkeit
ρ	$kg\ m^{-3}$	Dichte
σ	1	Querkontraktionszahl
δ		KRONECKER-Symbol
X	μ^3	Formfunktion
ζ	kg/s	akustische Impedanz
*		konjugiert komplexe Größe
-		FOURIER-Transformierte
>		ket-Vektor
<		bra-Vektor
< >		Skalarprodukt von braket-Vektoren
> <		dyadisches Produkt von braket-Vektoren
Σ		Summation
\int		Integration
Π		Produktintegration

Anhang

Meßsignal zugeführt. Das Verhältnis von Empfangssignal zu Referenzsignal wird vom Pegelmesser in Betrag und Phase gemessen und von der Recheneinheit verarbeitet und gespeichert.

Je nach Wandlertyp der Empfangssonde ist die Amplitudenmessung proportional zu einer Vektorkomponente der Schnelle oder der Auslenkung an der Oberfläche des Wellenleiters. Behält man Anregungs- und Meßposition der Sonden bei und variiert die Frequenz, ist das Ergebnis der Messung die Frequenzabhängigkeit einer spezifischen oder generalisierten Admittanz des Wellenleiters (zur Begriffsbildung s. Abschn. 5.2.3), die im folgenden als Übertragungsfunktion bezeichnet wird. Bei konstanter Frequenz läßt sich durch Verfahren der Sende- oder Empfangssonde die Ortsabhängigkeit der Amplitude, das Amplitudenprofil, bestimmen.

Zu den Komponenten des Meßplatzes im einzelnen:

Pegelmesser

Der als Pegelmesser eingesetzte rechnersteuerbare Impedanzmeßplatz HP4192A erlaubt die Vorgabe der Meßfrequenz mit einer Auflösung von 1 m Hz. Als Pegelmesser mißt das Gerät schmalbandig bei der Sendefrequenz das komplexe Verhältnis der Meßspannung zur Referenzspannung mit einer Genauigkeit von 0,04 dB im Betrag und 0,2 in der Phase. Die Meßvorschriften der Einzelmessung werden der inneren, der Meßfrequenz angepaßten Spezifikation des prozessorgesteuerten Gerätes überlassen.

Elektroakustische Wandler

Das Meßprinzip erlaubt den problemorientierten Einsatz verschiedener elektroakustischer Wandlertypen. Bei der Vermessung von Biegewellenleitern werden berührungslos abtastende elektrodynamische Wandler nach HERBERTZ /107/ bevorzugt eingesetzt. Diese linearen Wandler sind - der Diktion der Reziprozitätsanalyse nach /105/ folgend - antireziprok. Sie erlauben je nach Bauart die Messung der Normal- oder richtungsselektiv einer Tangentialkomponente des Schnellektors in der Oberfläche des Wellenleiters. Die Sonden stören die Schwingung des Wellenleiters im Vergleich zu einer mechanisch angekoppelten Schwingungserregung und -aufnahme wenig.

Die Messungen werden bei sehr kleinen Auslenkungen durchgeführt. Für den eingesetzten Sondentyp ergeben sich induzierte Spannungen in der Empfangs- sonde im nV-Bereich. Die Empfindlichkeit der Sonden steigt proportional zur Frequenz. Werden sowohl sende- wie empfangsseitig baugleiche Sonden eingesetzt, beeinflußt diese Abhängigkeit die Messung der Übertragungsfunktion nicht.

Anhang**Sendesignal**

Das Sendesignal des Pegelmessers wird verstärkt und für den interessierenden Frequenzbereich grob an die Impedanz der Sendesonde angepaßt. Bei den Messungen spielt sonst die Aufbereitung des Sendesignals keine Rolle, da das Signal der Sonde eine feste Phasenbeziehung zur eingepprägten Wechselkraft aufweist und als Referenzspannung für die Pegelmessung ausgekoppelt wird.

Empfangssignal

Die Spannung der Empfangssonde ist proportional zur Amplitude. Sie wird über den Meßverstärker B&K2606, in dessen Signalweg das Terzfilter B&K1617 eingeschaltet werden kann, dem Pegelmesser als Meßsignal zugeführt. Der Signal-Störabstand in einer Wellenleiterresonanz beträgt typisch 40 dB; mit zunehmender Frequenz macht sich die direkte Einstreuung des Sendesignals in das Empfangssignal bemerkbar.

Lagerung des Wellenleiters

Die Schwingungen des Wellenleiters sollen bei der Untersuchung so wenig wie möglich durch die unumgängliche mechanische Lagerung gestört werden. Dies wird mit einer frei verschiebbaren Schlaufenanordnung erreicht, die den Wellenleiter an zwei Stellen aufnimmt. In Abhängigkeit von der zu untersuchenden Schwingungsform sind die Orte der Schlaufen so zu wählen, daß eine möglichst geringe Störung der Schwingung zu erwarten ist. Daher werden als Orte der Schlaufen -falls vorhanden- Schnelleknoten, sonst Minima der Schnelle aufgesucht.

Anhang

A 2 Ablauf der Messung**A 2.1 Übertragungsfunktion**

Die Resonanzen frei schwingender Wellenleiter zeichnen sich durch sehr hohe Güten aus; bei Drehschwingungen runder Stäbe wurden Güten bis zu 120.000 gemessen. Eine Abtastung der Übertragungsfunktion in festen Frequenzinkrementen ist deshalb nicht sinnvoll, weil entweder bei kleinen Inkrementen zu viele Messungen die Meßzeit unnötig verlängern - und damit die Messung stärker abhängig wird von den sich langsam verändernden äußeren Bedingungen (z.B. Raumtemperatur) - oder bei größeren Inkrementen Resonanzen hoher Güte nicht aufgefunden werden. Aus diesen Überlegungen folgt die Notwendigkeit einer rückkoppelnden Verfahrenssteuerung bei der Aufnahme einer Übertragungsfunktion.

Zur Bestimmung des Wertes der Übertragungsfunktion bei einer Testfrequenz wird bei dieser Frequenz eine vorgebbare Anzahl von Einzelmessungen aufgenommen und zunächst auf systematische Fehler - ein Anwachsen oder Abfallen der Pegel in der Meßfolge - untersucht. Ein derartiger systematischer Fehler deutet darauf hin, daß ein stationärer Schwingungszustand noch nicht erreicht war, und führt zur Wiederholung der Meßfolge. Treten keine systematischen Fehler auf, erfolgt die Bestimmung des statistischen Fehlers in der Meßfolge. Es wird sowohl der Mittelwert der Übertragungsfaktoren (komplex) gebildet als auch die darauf bezogene Standardabweichung (betragsmäßig) bestimmt. Ein Kreis mit dem Radius der Standardabweichung um den Mittelwert definiert in der komplexen Ebene den statistischen Meßfehler.

Die Frequenz, für die der nächste Meßwert in die Meßserie für die Übertragungsfunktion aufgenommen wird, wird sowohl in Abhängigkeit von dem Meßfehler bei dem letzten Meßwert als auch in Abhängigkeit vom Meßfehler bei der neuen Frequenz bestimmt. Dazu wird zunächst bei einer Prüffrequenz gemessen, die sich allein aus der Schrittweite der letzten beiden Frequenzen in der Meßserie ergibt. Das Meßergebnis bei dieser Prüffrequenz wird nur dann in die Meßreihe aufgenommen, wenn der zu ihr gehörende Mittelwert in dem Kreis mit dem Radius eines vorgebbaren Vielfachen der Standardabweichung des Meßwertes bei der vorherigen Meßfrequenz liegt. Andernfalls wird interpolativ eine neue, enger benachbarte Prüffrequenz bestimmt. Dieser Vorgang wird iterativ solange fortgesetzt, bis die obige Bedingung bei der Prüffrequenz erfüllt ist. Liegt der Mittelwert der Testfrequenz beim ersten Versuch innerhalb des Kreises mit der einfachen Standardabweichung, wird der Meßwert übernommen und die Schrittweite erhöht.

Da die Schrittweite zwischen den Meßfrequenzen aus der Standardabweichung abgeleitet wird, ist die Dichte der Meßwerte ein Maß für den statistischen Meßfehler.

Anhang

Die maximale Schrittweite in der Frequenz wird durch die Vorgabe der Güte, die noch aufgefunden werden soll, begrenzt. Die kleinste Schrittweite der Frequenz ist durch das kleinste Frequenzinkrement des Pegelmeßplatzes vorgegeben.

Diese Verfahrensweise hat den Vorteil,

- daß nach Genauigkeitsvorgaben die notwendige und hinreichende Anzahl von Meßpunkten aufgenommen wird,
- daß in der Punktdichte gleichzeitig eine Information über die Meßgenauigkeit enthalten ist,
- daß die Übertragungsfunktion unabhängig von der Durchlaufrichtung der Frequenz bestimmt wird,
- daß keine Resonanz mit kleinerer Güte als die vorgegebene überfahren wird,
- daß Störungen im Signalweg im Meßergebnis erkennbar sind, weil die Meßwerte vor und nach der Störung um erheblich mehr differieren werden, als es die Genauigkeitsvorschrift zuläßt, und deshalb das Meßkriterium dazu führt, daß sich beide Meßfrequenzen nur um das kleinste Frequenzinkrement unterscheiden.

A 2.2 Amplitudenprofil

Die Messung des Amplitudenprofils erfolgt durch manuelle Positionierung der Sonden in der Regel entlang einer Oberfläche des Wellenleiters parallel zur Richtung einer Achse. Dazu wird die Empfangssonde mittels einer Positionier-einrichtung auf einer optischen Bank montiert. Die abschnittsweise aufgenommenen Amplituden werden durch den Rechner gespeichert.

Anhang

A 3 Auswertung

A.3.1 Übertragungsfunktion

Die Messung der Übertragungsfunktion wird durch drei Quellen systematischer Fehler beeinflusst: durch die Einstreuung des Sendesignals in das Meßsignal, durch eine Drift der Umgebungstemperatur und durch die Schallabstrahlung der Wellenleiter an Luft. Der Einfluß der Schallabstrahlung ist systemimmanent und kann nicht korrigiert werden. Der Einfluß einer Temperaturdrift kann durch eine möglichst kurze Meßdauer, respektive eine Beschränkung der Untersuchung auf einzelne Resonanzbereiche, und eine Kontrolle der Temperatur vermindert bzw. berücksichtigt werden.

Wegen der hohen Güte der Wellenleiterresonanzen kann häufig die Übertragungsfunktion durch die Angabe der Resonanzfrequenzen und der zugehörigen Güten sachgerecht charakterisiert werden. Die Auswertung der Messung einer Übertragungsfunktion enthält daher eine Korrektur im Hinblick auf die Einstreuung und eine Prozedur zur Berechnung von Resonanzfrequenz und Güte.

Eine systematische, automatisierbare Auswertung erfordert eine standardisierte Darstellung der Meßergebnisse. Da die Meßwerte die relative Amplitudenantwort auf eine konstante, harmonische aber unbekannte Kraftanregung repräsentieren, können sie jeweils bezogen aufgetragen werden. Als Bezugspegel wird das im jeweiligen Frequenzbereich auftretende Betragsmaximum der Übertragungsfunktion gewählt. Die Angabe der Phase erfolgt relativ zur Phase beim Bezugspegel. Für relative Frequenzangaben dient die mit diesem Meßpunkt verbundene Frequenz als Bezugsfrequenz.

Um einen Vergleich zwischen verschiedenen Messungen zu ermöglichen, werden die Meßergebnisse in einem festen Pegelbereich und für eine konstante, relative Spreizung der Frequenzskala um die Bezugsfrequenz linear aufgetragen. Die Meßpunkte werden in den Darstellungen des Betrages und der Phase über der Frequenz jeweils durch Geradenstücke verbunden, um eine Abschätzung des statistischen Fehlers zu ermöglichen.

Anhand der Abb. A.2 bis A.4 werden weiter unten drei ausgewählte Beispiele diskutiert. Die jeweils oberen Darstellungen zeigen den Betrag und die Phase der normierten Übertragungsfunktion.

Berücksichtigung der Einstreuung

Die Meßwerte sind systematisch durch die Überlagerung der Einstreuung des Sendesignals in das Meßsignal verfälscht. Dieses Störsignal ist für die betrachteten Resonanzbereiche in guter Näherung konstant; die Beeinträchtigung der Messung durch diese Störung hängt von der relativen Resonanzüberhöhung

Anhang

und von der jeweils erforderlichen Sondenordnung ab. Zur Ermittlung der Einstreuung ist die Darstellung des Meßsignals als Ortskurve in der komplexen Ebene vorteilhaft (s. jeweils linke Abbildungen in Abb. A.2-A.4).

Wegen der hohen Güte g der Resonanzen ist für alle Moden eine einfache Hypothese für die frequenzabhängige Übertragungsfunktion $S(f)$ im Bereich der Resonanzfrequenz f_0 sachgerecht:

$$S(f) = \frac{1}{1 + jg \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)} \quad (\text{A.1})$$

In der normierten Darstellung beschreibt S einen Kreis um den Punkt $0,5 + j0$ mit dem Radius $0,5$, der mit steigender Frequenz in negativem Umlaufsinn durchlaufen wird. Die Einstreuung bewirkt eine Verschiebung des Mittelpunktes dieses Kreises. Deshalb kann die Einstreuung durch eine numerische Optimalanpassung der Meßwerte an einen Kreis bestimmt und aus den Meßwerten $S = X + jY$ auf die Werte ohne Einstreuung $\bar{X} + j\bar{Y}$ entsprechend rückgerechnet werden.

Bestimmung der Resonanzfrequenz und der Güte

Aus den um die Einstreuung reduzierten Werten werden die Resonanzfrequenz und die Güte durch eine numerische Regression auf die in Gl. A.1 postulierte Resonanzhypothese bestimmt. Bei Auftragung von f^2 über $f \bar{Y}/\bar{X}$ ergibt sich nach Gl. A.2 eine Gerade.

$$f^2 = -\frac{f_0}{g} f \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} + f_0^2 \quad (\text{A.2})$$

Die Verschiebung der Geraden auf der f^2 -Achse ist ein Maß für die den Meßwerten zugrunde liegende Resonanzfrequenz; aus der Steigung der Geraden läßt sich danach die Güte ermitteln.

In den standardisierten Darstellungen der Meßergebnisse werden die Frequenzen auf die jeweilige Bezugsfrequenz normiert. Da die Resonanzfrequenz in der Regel sehr nahe bei der Bezugsfrequenz f_N liegt, ist die negative Steigung in den Abbildungen zur Regression umgekehrt proportional zur Güte.

Störungen während der Messung sind in der Darstellung zur Ortskurve in der Regel deutlicher zu erkennen als in der Auftragung des Pegels bzw. der Phase (vgl. Abb. A.3). In diesen Fällen kann in die automatische numerische Auswertung für die Zielgrößen Resonanzfrequenz und Güte eingegriffen werden und der zur Auswertung benutzte Frequenzbereich auf den ungestörten Bereich begrenzt werden.

A 3.2 Amplitudenprofil

Die Ortsauflösung des Meßverfahrens wird durch die Abmessungen der effektiv sensitiven Fläche der Aufnehmer bestimmt. Bei den elektrodynamischen Sonden liegt die Ortsauflösung bei ca. 7 mm. Diese Messung wird durch die Einstreuung des Sendesignals in das Empfangssignal erheblich gestört, da während der Aufnahme des Profils die Einstreuung nicht konstant ist, sondern von der Position der Sonden abhängt. Bei der Abtastung des Amplitudenprofils führen die Toleranzen bei der mechanischen Positionierung zu weiteren Meßfehlern.

Da die Empfindlichkeit der vorwiegend eingesetzten elektrodynamischen Sonden exponentiell mit dem Abstand vom Wellenleiter abfällt, ist zur Erzielung einer optimalen Kopplung zwischen Wandler und Wellenleiter ein möglichst kleiner Abstand einzustellen. Weil der Wellenleiter in Schlaufen aufgehängt ist, wird die Messung anfällig gegen äußere Erschütterungen, die insbesondere wegen der mechanisch geführten Positionierung unvermeidbar sind. Dieser Meßfehler ist vorwiegend statistisch und kann durch Mittelwertbildung während der Messung begrenzt werden.

Auf eine Aufbereitung der Meßwerte kann daher weitgehend verzichtet werden. Die gemessenen Amplituden werden lediglich auf die maximal auftretende Amplitude normiert, weil die Messung selbst nur relative Aussagen über das Amplitudenprofil erlaubt.

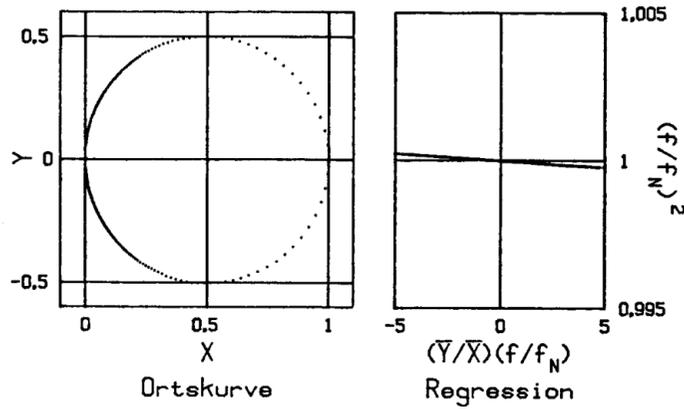
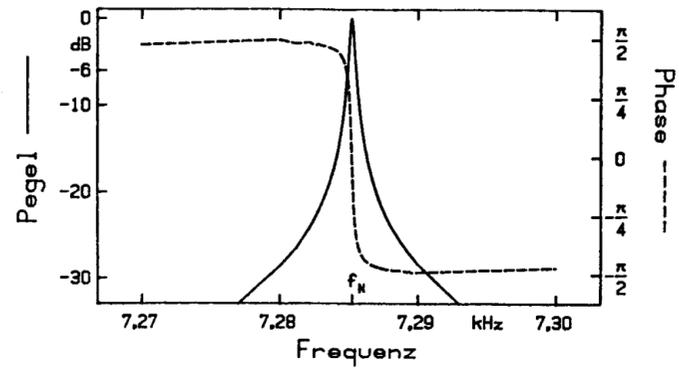
A 4 Beispiele

Die Abbn. A.2 bis A.4 zeigen ausgewählte Beispiele von Meß- und Auswertungsergebnissen an einem Wellenleiter. Die Messung der Übertragungsfunktion von Dehnschwingung ist unproblematisch, da sich ein ausreichend großes Signal-Störverhältnis erreichen läßt. Die Schallabstrahlung in Luft ist bei diesem Schwingungsmod sehr gering, weil im wesentlichen nur über die Stirnfläche abgestrahlt wird. Wegen der ausgeprägten Resonanzüberhöhung spielt die Einstreuung bei diesem ausgewählten Beispiel in Abb. A.2 keine Rolle. Als Punktdichte ergibt sich bei der Versuchsführung nahezu für den gesamten Resonanzbereich das kleinst mögliche Frequenzinkrement von 1 mHz. Statische Meßfehler treten bei dieser Aufnahme völlig in den Hintergrund.

Während die Aufnahme einer Drehschwingung in Abb. A.3 in der Darstellung des Pegels und der Phase keinen offensichtlichen Hinweis auf eine Störung der Messung gibt, ist in der Ortskurve deutlich eine Abweichung zu erkennen. Durch eine Begrenzung der Auswertung auf den Hauptbereich der Resonanz lassen sich aber auch hier die Resonanzfrequenz und die Güte der Schwingung eindeutig bestimmen. Diese Messung ist nicht typisch für eine Drehschwingung. Sie zeigt aber auf, daß zur Erzielung einer hohen Genauigkeit eine numerische Auswertung erforderlich ist.

Abb. A.4 zeigt die Aufnahme einer Biegeresonanz mit einer vergleichsweise geringen Güte, die auf die Abstrahlung zurückzuführen ist. Sowohl die Einstreuung als auch sonstige Fehler bei der Messung sind in der Ortskurve deutlich erkennbar. Die Krümmung der Regressionsgeraden deutet auf einen systematischen Fehler hin. Es handelt sich hierbei wahrscheinlich um eine Kopplung mit einem bei einer benachbarten Frequenz resonanten Luftschallweg, der zufällig durch die Meßanordnung gebildet wird. Derartige Kopplungen wurden häufiger beobachtet, wenn die zur Wellenleiterresonanz gehörende Luftschallwellenlänge in der Größenordnung eines typischen Abstandes großer Flächen in der Meßanordnung liegt.

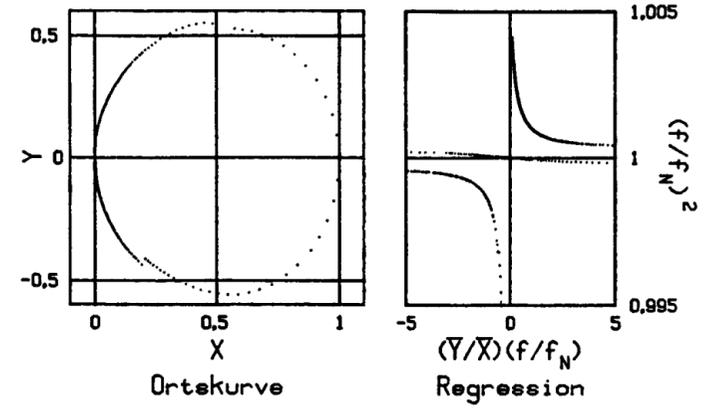
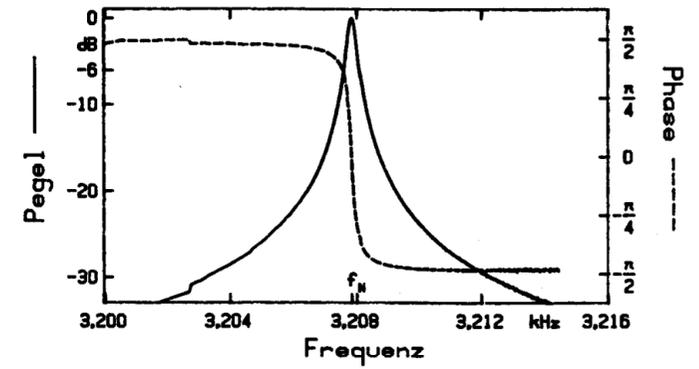
Anhang



1. Dehnschwingung
 Frequenz: 7,285219 kHz Güte: 20838

Abb. A.2 Auswertung für die Messung einer Dehnschwingung

Anhang

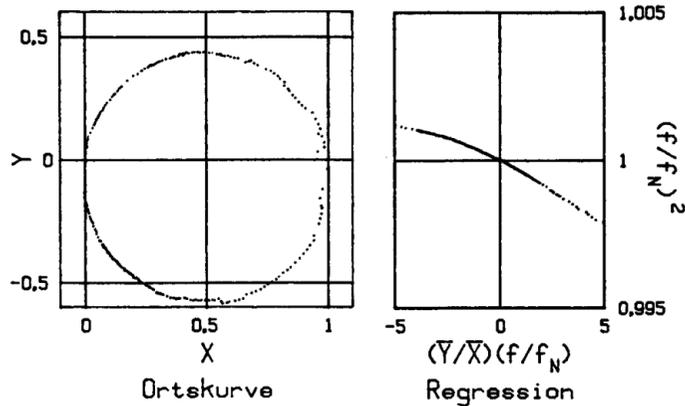
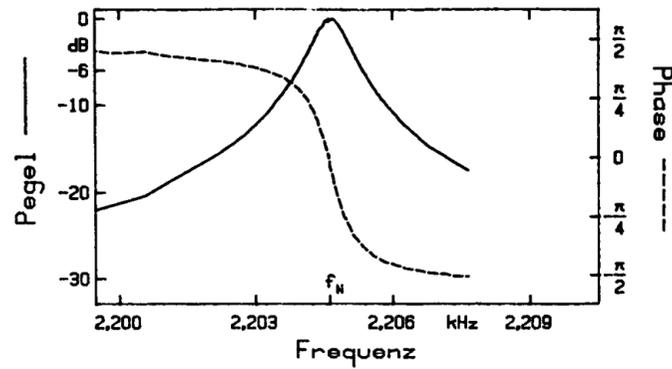


1. Drehschwingung
 Frequenz: 3,207859 kHz Güte: 10845

Abb. A.3 Auswertung für die Messung einer Drehschwingung

Anhang

Anhang



2. (b)-Biegeschwingung
 Frequenz: 2,204526 kHz Güte: 3377

Abb. A.4 Auswertung für die Messung einer Biegeschwingung

B Zu den numerischen Problemen beim Kettenmatrixverfahren

Für die numerische Rechnung mit differentiellen Kettenmatrizen wird eine hinreichend große Rechenbreite benötigt, um die mit den Projektoren und Eigenvektoren - und damit auch bei allen Kettenmatrixoperationen - erforderlichen Additionen und Multiplikationen korrekt ausführen zu können. Denn die Elemente der Vektoren und Matrizen überstreichen etliche Zehnerpotenzen.

In Taf. B.1 sind die Zahlenwerte des kraftbezogenen Basissystems und in Taf. B.2 die der zugehörigen Projektoren für den Probekörper mit der Querschnittshöhe 19,5 mm bei einer Betriebsfrequenz von 20 kHz angegeben. In den Abbildungen wird auf die Angabe der physikalischen Einheit verzichtet; die Zahlenangaben beziehen sich auf Rechnungen im (mm, kg, s)-System.

Selbst bei Rechnungen mit kurzen Leitungsstücken ist z.B. bei der Bildung der Kettenmatrix sicherzustellen, daß die bei der Multiplikation zweier Projektoren auftretenden Differenzen ausreichend genau im Vergleich zu den auftretenden Elementen berechnet werden. Bei den in Taf. B.1 dargestellten Ergebnissen mit einer Rechenbreite von 10 Dezimalen, liegt der Fehler einer einfachen Rechnung in der Größenordnung 10^{-10} und damit nur 3 Zehnerpotenzen tiefer als der im Element 44 vorliegende Wert.

Bei der Berechnung längerer Wellenleiter kann die Rechnung nur dann schlecht konditioniert sein, wenn die beiden kritischen Eigenwerte exponentielle Funktionen der Leitungslänge sind. Bei der Berechnung homogener Leitungsstücke wird nur einer der zum Wellentyp η gehörenden Propagatoren davon betroffen, während der andere mit der Leitungslänge gegen die Nullmatrix geht. Da der Eigenwert vom Produkt der Wellenzahl mit der Leitungslänge abhängt, hängt die benötigte Rechenbreite gleichermaßen von der zu erreichenden Leitungslänge und vom Wert des Imaginärteils der Wellenzahl ab.

Für eine Abschätzung der zu erwartenden Differenzen großer Zahlen ist es nützlich, die Wellenzahl η in Einheiten der reziproken Länge in Abhängigkeit von der Frequenz aufzutragen. Abb. B.3 stellt diesen Zusammenhang für den Probekörper für den interessanten Frequenzbereich dar.

Bei der Berechnung homogener Leitungen kann man die numerischen Schwierigkeiten so lange vermeiden, bis zur Berechnung der Kettenmatrix oder von Zustandsvektoren die Superposition der vier Eigenzustände erforderlich wird. Bei der Berechnung inhomogener Leitungen über die differentielle Verknüpfung ihrer Kettenmatrizen kann man die Produktintegration der Kettenmatrix nicht auf die Integration der Eigenwerte zurückführen, weil die Propagatoren der nun verschiedenen differentiellen Leitungsstücke nicht orthogonal sind. Deshalb ist in diesem Falle jeweils eine lokale Superposition der Eigenzustän-

Anhang

Anhang

de erforderlich: Die ungünstigen Eigenschaften des Propagators des einen kritischen Eigenzustandes werden auch differentiell auf die übrigen Eigenzustände übertragen.

$$\begin{aligned}
 \left[|_{kC_3} \rangle \right] &= \begin{bmatrix} 1,00000000 \\ j \ 2,09106132 \ E-4 \\ j \ -1,48507483 \ E \ 1 \\ j \ 1,81107579 \ E-5 \end{bmatrix} & \left[\langle_{kC_3} | \right] &= \begin{bmatrix} 2,18700781 \ E-1 \\ j \ -1,04588411 \ E \ 3 \\ j \ -1,89417539 \ E-2 \\ j \ -1,55321617 \ E \ 4 \end{bmatrix} \\
 \left[|_{kC_2} \rangle \right] &= \begin{bmatrix} 1,00000000 \\ j \ -2,73340275 \ E-4 \\ j \ 1,50927023 \ E \ 1 \\ j \ -1,40805115 \ E-5 \end{bmatrix} & \left[\langle_{kC_2} | \right] &= \begin{bmatrix} 2,81299219 \ E-1 \\ j \ -1,02911735 \ E \ 3 \\ j \ -1,44904986 \ E-2 \\ j \ 1,55321617 \ E \ 4 \end{bmatrix} \\
 \left[|_{kC_1} \rangle \right] &= \begin{bmatrix} 1,00000000 \\ j \ 2,73340275 \ E-4 \\ j \ -1,50927023 \ E \ 1 \\ j \ -1,40805115 \ E-5 \end{bmatrix} & \left[\langle_{kC_1} | \right] &= \begin{bmatrix} 2,81299219 \ E-1 \\ j \ 1,02911735 \ E \ 3 \\ j \ 1,44904986 \ E-2 \\ j \ 1,55321617 \ E \ 4 \end{bmatrix} \\
 \left[|_{kC_4} \rangle \right] &= \begin{bmatrix} 1,00000000 \\ j \ -2,09106132 \ E-4 \\ j \ 1,48507483 \ E \ 1 \\ j \ 1,81107579 \ E-5 \end{bmatrix} & \left[\langle_{kC_4} | \right] &= \begin{bmatrix} 2,18700781 \ E-1 \\ j \ 1,04588411 \ E \ 3 \\ j \ 1,89417539 \ E-2 \\ j \ -1,55321617 \ E \ 4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Abb. B.1 Zahlenwerte des kraftbezogenen Basissystem des Probekalkens für die Querschnittshöhe 19,5 mm bei einer Betriebsfrequenz von 20 kHz und einer Rechenbreite von 10 Dezimalen

$$\begin{aligned}
 \left[\underline{P}_3 \right] &= \begin{bmatrix} 2,18700781 \ E-1 & j & -1,04588411 \ E \ 3 & j & -1,89417539 \ E-2 & j & 1,55321617 \ E \ 4 \\ j & 4,57316744 \ E-5 & 2,18700781 \ E-1 & j & -3,96083688 \ E-6 & j & 3,24787025 \\ j & -3,24787025 & 1,55321617 \ E \ 4 & j & 2,81299219 \ E-1 & j & 2,30664224 \ E \ 5 \\ j & 3,96083689 \ E-6 & 1,89417539 \ E-2 & j & -3,43049518 \ E-7 & j & 2,81299219 \ E-1 \end{bmatrix} \\
 \left[\underline{P}_2 \right] &= \begin{bmatrix} 2,81299219 \ E-1 & j & -1,02911735 \ E \ 3 & j & -1,44904986 \ E-2 & j & 1,55321617 \ E \ 4 \\ j & -7,68904060 \ E-5 & 2,81299219 \ E-1 & j & 3,96083688 \ E-6 & j & -4,24556535 \\ j & 4,24556536 & -1,55321617 \ E \ 4 & j & 2,18700781 \ E-1 & j & -2,34422291 \ E \ 5 \\ j & -3,96083689 \ E-6 & 1,44904986 \ E-2 & j & -2,04033633 \ E-7 & j & 2,18700781 \ E-1 \end{bmatrix} \\
 \left[\underline{P}_1 \right] &= \begin{bmatrix} 2,81299219 \ E-1 & j & 1,02911735 \ E \ 3 & j & 1,44904986 \ E-2 & j & 1,55321617 \ E \ 4 \\ j & 7,68904060 \ E-5 & 2,81299219 \ E-1 & j & 3,96083688 \ E-6 & j & 4,24556535 \\ j & -4,24556536 & -1,55321617 \ E \ 4 & j & 2,18700781 \ E-1 & j & 2,34422291 \ E \ 5 \\ j & -3,96083689 \ E-6 & -1,44904986 \ E-2 & j & 2,04033633 \ E-7 & j & 2,18700781 \ E-1 \end{bmatrix} \\
 \left[\underline{P}_4 \right] &= \begin{bmatrix} 2,18700781 \ E-1 & j & 1,04588411 \ E \ 3 & j & 1,89417539 \ E-2 & j & -1,55321617 \ E \ 4 \\ j & -4,57316744 \ E-5 & 2,18700781 \ E-1 & j & -3,96083688 \ E-6 & j & -3,24787025 \\ j & 3,24787025 & 1,55321617 \ E \ 4 & j & 2,81299219 \ E-1 & j & -2,30664224 \ E \ 5 \\ j & 3,96083689 \ E-6 & -1,89417539 \ E-2 & j & 3,43049518 \ E-7 & j & 2,81299219 \ E-1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Abb. B.2 Zahlenwerte der Projektoren des Probekalkens für die Querschnittshöhe 19,5 mm bei einer Betriebsfrequenz von 20 kHz

Anhang

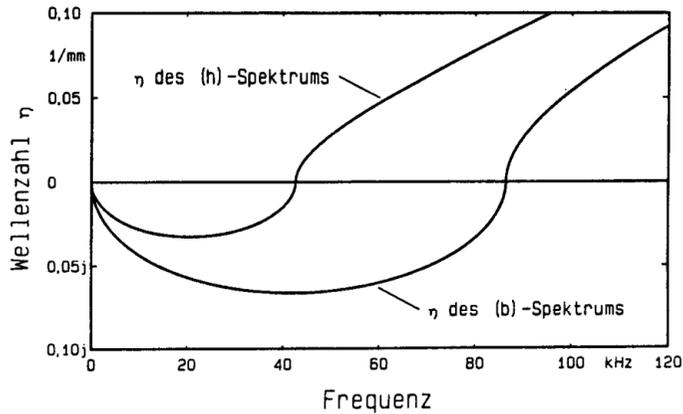


Abb. B.3 Abhängigkeit der Wellenzahl η des (b)- und des (h)-Biegewellen-Spektrums für den Probekörper

Anhang

C Reziprozitätsbedingungen einer 4x4 Kettenmatrix

Die folgenden 16 Beziehungen zwischen den 2 x 2 Unterdeterminanten einer 4 x 4 Kettenmatrix sind notwendige Reziprozitätsbedingungen.

$$A_{11} A_{24} - A_{21} A_{14} = A_{21} A_{32} - A_{31} A_{22}$$

$$A_{11} A_{33} - A_{31} A_{13} = A_{22} A_{44} - A_{42} A_{24}$$

$$A_{11} A_{42} - A_{41} A_{12} = A_{12} A_{23} - A_{22} A_{13}$$

$$A_{11} A_{44} - A_{41} A_{14} = A_{22} A_{33} - A_{32} A_{23}$$

$$A_{13} A_{24} - A_{23} A_{14} = A_{31} A_{42} - A_{41} A_{32}$$

$$A_{11} A_{22} - A_{21} A_{12} = A_{33} A_{44} - A_{43} A_{34}$$

$$A_{23} A_{34} - A_{33} A_{24} = A_{31} A_{44} - A_{41} A_{34}$$

$$A_{13} A_{44} - A_{43} A_{14} = A_{32} A_{43} - A_{42} A_{33}$$

$$A_{11} A_{23} - A_{21} A_{13} = A_{21} A_{42} - A_{41} A_{22}$$

$$A_{11} A_{32} - A_{31} A_{12} = A_{12} A_{24} - A_{22} A_{14}$$

$$A_{11} A_{34} - A_{31} A_{14} = A_{22} A_{34} - A_{32} A_{24}$$

$$A_{11} A_{43} - A_{41} A_{13} = A_{22} A_{43} - A_{42} A_{23}$$

$$A_{12} A_{33} - A_{32} A_{13} = A_{12} A_{44} - A_{42} A_{14}$$

$$A_{21} A_{33} - A_{31} A_{23} = A_{21} A_{44} - A_{41} A_{24}$$

$$A_{23} A_{44} - A_{43} A_{24} = A_{31} A_{43} - A_{41} A_{33}$$

$$A_{13} A_{34} - A_{33} A_{14} = A_{32} A_{44} - A_{42} A_{34}$$