

## BIEGEWELLENSPEKTRUM EINES FREISCHWINGENDEN BALKENS

K.-W. Hirsch, J. Herbertz

Ultraschalltechnik, Universität -GH- Duisburg

Zur Systematik der Modelle

Zur Beschreibung von Biegewellen auf Balken werden in der Literatur verschiedene Modelle vorgeschlagen. Dabei gelten in der Regel TIMOSHENKO'sche Modelle als die zutreffendsten eindimensionalen Balkenmodelle. Die vier gekoppelten linearen Differentialgleichungen in diesen Modellen zwischen den Feldgrößen der Biegung, Querkraft, Drehgeschwindigkeit, Drehmoment und Querschnelle lauten unter Benutzung der Vorzeichenkonvention nach [1]:

$$K' = -\rho F V \quad V' = Q - \frac{K}{T_k G F}$$

$$M' = -IK + \rho I \Omega$$

$$Q' = -\frac{1}{EI} M$$

K Querkraft

M Drehmoment

F Querschnittsfläche

E Elastizitätsmodul

 $\rho$  Dichte

V Querschnelle

 $\Omega$  Drehgeschwindigkeit

I Flächenträgheitsmoment

G Schubmodul

 $T_k$  TIMOSHENKO-Koeffizient.

Neben den auf den Namen TIMOSHENKO bezogenen Modellen werden auch die auf den Namen BERNOULLI bezogenen Modelle betrachtet, für die  $T_k=1$  gilt. Die Bezeichnung als BERNOULLI-Modelle setzt voraus, daß E der YOUNG'sche Modul und G der Schubmodul ist, während die Verwendung effektiver Module durch die Bezeichnung BERNOULLI'sche Modelle ausgedrückt wird. Entsprechendes soll für den Unterschied zwischen TIMOSHENKO- und TIMOSHENKO'schen Modellen gelten. Wenn in der Familie der BERNOULLI'schen Modelle die Drehträgeit und/oder die Schubelastizität nicht vernachlässigt ist, wird dies durch die Adjektive drehtrege bzw. schubelastisch in der Modellbezeichnung angezeigt.

Problemstellung

Nur schubelastische Modelle sagen zwei unterschiedliche Biegewellengeschwindigkeiten voraus. Bei Vernachlässigung der inneren Dämpfung sind beide Geschwindigkeiten reell, wenn die reziproke Wellenzahl der Scherwelle größer ist als der Trägheitsradius des Querschnittes, sonst ist eine der beiden Geschwindigkeiten reell, die andere imaginär.

Die folgende Diskussion wird zeigen, daß eindimensionale, schubelastische Modelle in der Lage sind, auch dann Biegewellen auf Balken richtig zu beschreiben, wenn beide Geschwindigkeiten reell sind.

Vergleich der Modelle anhand von Meßergebnissen

Zur Beurteilung der Prädiktionskraft der Modelle wurde das Biegewellenspektrum eines freischwingenden quaderförmigen Balkens und die zugehörigen Schwingungsformen bis zu einer Frequenzgrenze von 50 kHz aufgenommen. Die Resonanzfrequenzen wurden mit einer relativen Genauigkeit von 0,001% bestimmt.

Der Balken hat eine Länge von 353 mm und Querabmessungen von 19,5 mm und 39,5 mm. Um einen sachgerechten Vergleich zwischen den Modellvorhersagen und den Meßwerten zu erhalten, wurden die Form- und Werkstoffparameter dieses Balkens mit einer relativen Genauigkeit von 0,001% bestimmt. Auf dieser Grundlage war eine rechnerische Auswertung der Modelle mit einer akkumulierten relativen Genauigkeit von 0,01% möglich.

Auf dem Balken können sich in Längsrichtung in zwei verschiedenen Schwingungsebenen Biege-Wellen ausbreiten. Im folgenden werden die Wellen, für die die größere Querabmessung die Profilhöhe darstellt, als (h)-Biege-Wellen bezeichnet. Entsprechend werden die dazu senkrecht schwingenden Wellen als (b)-Biege-Wellen bezeichnet. Im untersuchten Frequenzbereich sind für das (b)-Biege-Wellenspektrum die reziproken Wellenzahlen stets größer als der Trägheitsradius; die zweite Biege-Wellengeschwindigkeit ist stets imaginär. Für (h)-Biege-Wellen wird bei einer kritischen Frequenz von 42,637 kHz (nach dem Schubelastischen BERNOULLI-Modell) die reziproke Wellenzahl der Scherwelle erreicht, die dem Trägheitsradius entspricht. Oberhalb dieser Frequenz sind demnach zwei unabhängig ausbreitungsfähige Biege-Wellen zu erwarten. Abb. 1 zeigt Vergleiche für das (b)- und das (h)-Biege-Wellenspektrum mit Vorhersagen aus verschiedenen BERNOULLI-Modellen. Der Vergleich ergibt erwartungsgemäß, daß mit zunehmender Ordnung der Schwingungen die Modelle ohne Drehträgheit und Schubelastizität progressiv von den Meßwerten abweichen. Die qualitative Übereinstimmung des (h)-Biege-Wellenspektrums mit

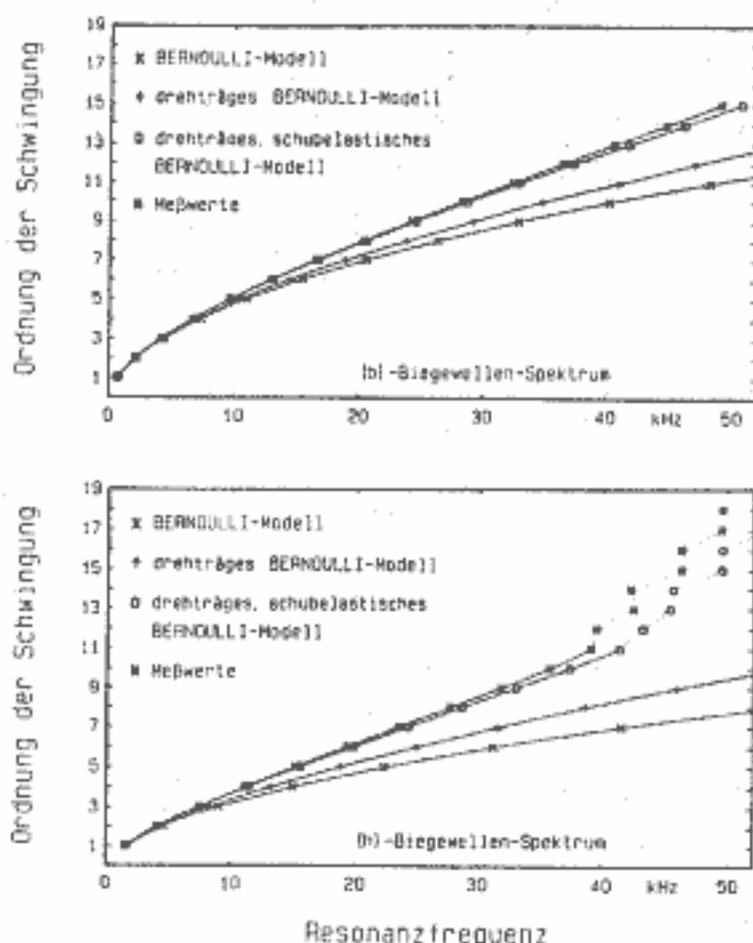


Abb. 1 Meßwerte und Voraussagen aus verschiedenen BERNOULLI-Modellen für das (b)- bzw. (h)-Biege-Wellenspektrum

den Voraussagen des drehträgen, schubelastischen BERNOULLI-Modells oberhalb der kritischen Frequenz bestätigt die physikalische Existenz zweier unabhängiger Biege-Wellen.

Eine weitere Bestätigung für die Beteiligung von zwei unabhängigen Biege-Wellen bei der Ausbildung der Biegeresonanzen liefert der Vergleich zwischen den theoretisch vorausgesagten und den experimentell bestimmten Schwingungsformen. In Abb. 2 werden den Rechenwerten für die Querschnelle und für die Drehgeschwindigkeit die Meßwerte der Normal- und der Tangentialschnelle auf der Mantelfläche des Balkens gegenübergestellt. Die Übereinstimmung zwischen Modellaussagen und Meßwerten belegt die Zuverlässigkeit des eindimensionalen, drehträgen, schubelastischen BERNOULLI-Modells auch für Biege-Wellen in einem Bereich, in dem die reziproke Wellenzahl der Scherwelle, kleiner ist als der Trägheitsradius des Querschnitts.

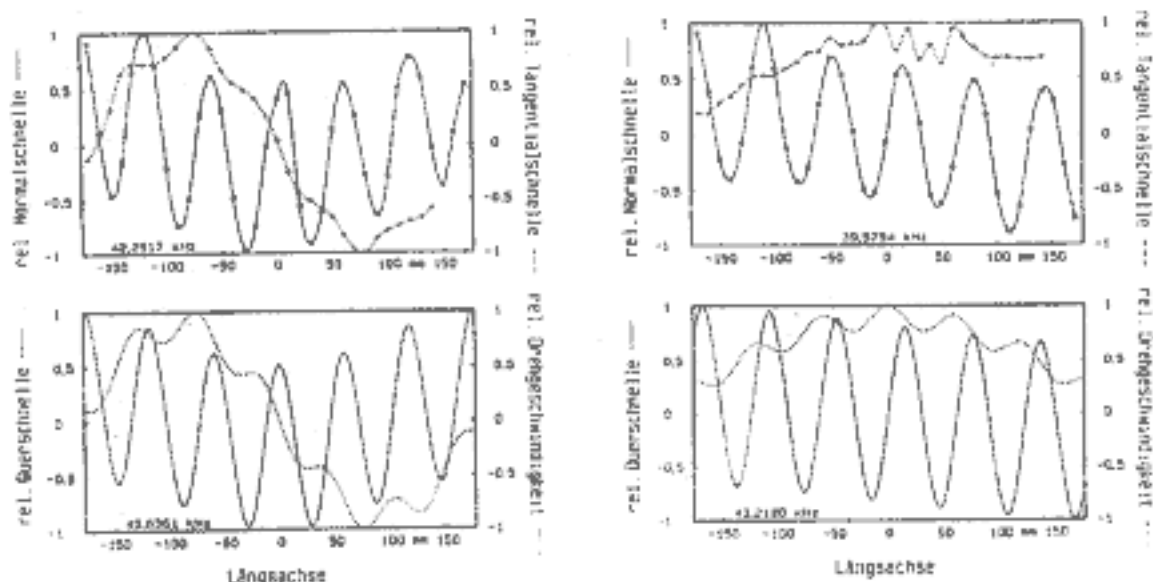


Abb. 2 Gegenüberstellung der gemessenen rel. Normal- bzw. rel. Tangentialschnelle und der rel. Querschnelle bzw. rel. Drehgeschwindigkeit nach dem drehträgen, schubelastischen BERNOULLI-Modell für zwei Schwingungen des (h)-Biegewellenspektrums

Zur Beurteilung der TIMOSHENKO-Modelle sind in Abb. 3 die Relationen zwischen den Voraussagen des oben diskutierten, drehträgen, schubelastischen BERNOULLI-Modells und den experimentellen Meßwerten bzw. den Voraussagen des TIMOSHENKO-Modells für verschiedene Werte von  $T_k$  dargestellt. In der Literatur über den TIMOSHENKO-Koeffizienten wird in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle eine Abhängigkeit des  $T_k$  nur von der Querkontraktionszahl und von der Form des Balkenquerschnitts hergeleitet. Für das (b)- und das (h)-Spektrum sollte deshalb unabhängig von der Frequenz der gleiche  $T_k$  gelten. Aus der Lage der Meßwerte läßt sich unschwer erkennen, daß der  $T_k$  für jedes Spektrum in unterschiedlicher Weise von der Ordnung der Schwingung abhängt und Werte zwischen 0,5 und 0,9 annehmen müßte. Dieses Mißverhältnis ist auch nicht durch eine andere Wahl der Form- und Werkstoffparameter zu beseitigen.

Das Versagen des TIMOSHENKO-Modells führt zu der Überlegung, ob die Vorstellung der Verwölbung der Querschnittsflächen bei dynamischer Biegung zutrifft. Ein Maß für die Verwölbung sind die in Abb. 4 dargestellten Meßwerte der Normalschnelle auf der Stirnfläche des freischwingenden Balkens. Es ist zu erkennen, daß die tatsächliche Verwölbung der Stirnfläche nicht monoton mit kleiner werdenden reziproken Wellenzahlen zunimmt, sondern selbst bei dicht benachbarten Resonanzen (42,542 kHz und 42,915 kHz) unterschiedlich ausgeprägt sein kann.

Abb. 3 Meßwerte und Voraussagen aus dem TIMOSHENKO-Modell für verschiedene Werte von  $T_k$  für das (b)- bzw. (h)-Biegewellenspektrum im Verhältnis zu den Voraussagen des drehträgen, Schubelastischen BERNOULLI-Modells

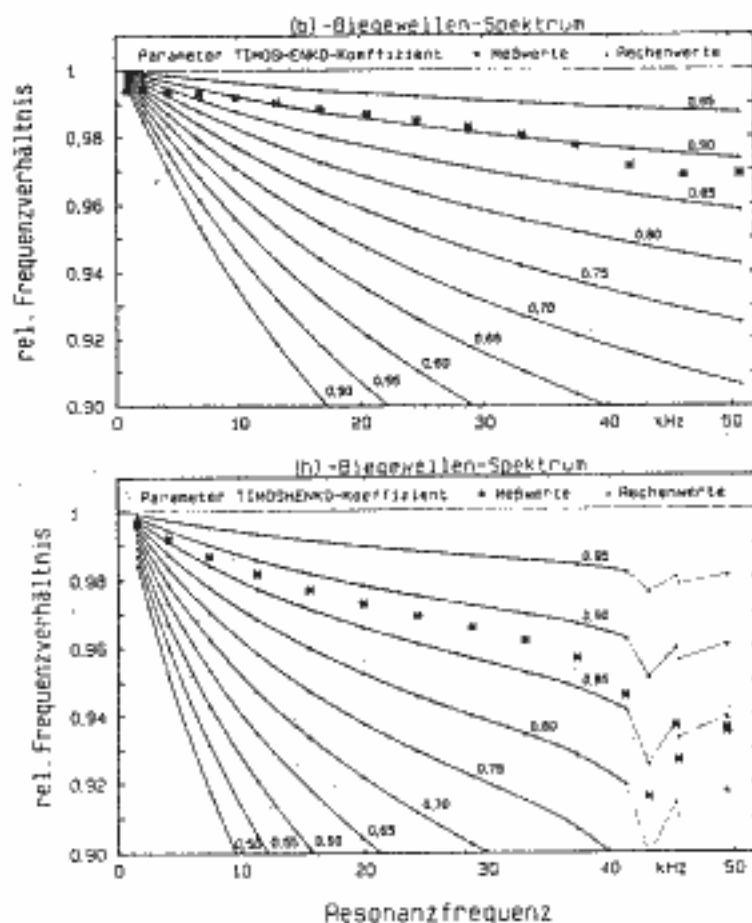
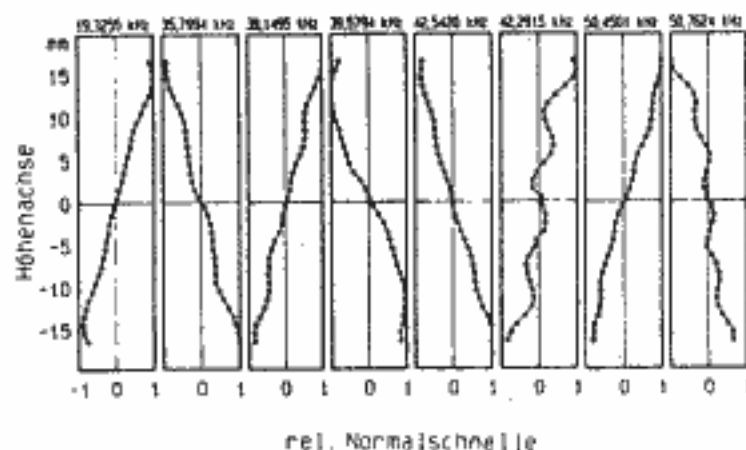


Abb. 4 Gemessene rel. Normalschnelle auf einer Stirnseite des Balkens bei Schwingungen des (h)-Biegewellenspektrums



#### Literatur

- /1/ HIRSCH, K.-W.: "Untersuchungen über die Grundlagen der Berechnung von Ultraschall-Biegewellenleitern", Universität-GH-Duisburg (Dissertation in Vorb.)