

## ÜBERTRAGUNGSEIGENSCHAFTEN VON VERLUSTBEHAFTETEN BIEGEWELLENLEITERN

K.-W. Hirsch, J. Herbertz

Ultraschalltechnik, Universität -GH- Duisburg

### 1. Einleitung

In /1/ wird eine standardisierbare Charakterisierung aller Komponenten akustischer Energiesysteme auf der Grundlage linearer Übertragungsmatrizen zwischen den beteiligten konjugierten elektrischen bzw. akustischen Größenpaaren vorgeschlagen. Um Biegewellenleiter in diese Betrachtungen einschließen zu können, muß auch für diese Komponente die Beschreibung durch Übertragungsmatrizen eingeführt werden. In der Literatur wird diese Methode wegen der zu erwartenden numerischen Schwierigkeiten nur im Ansatz behandelt.

### 2. Differentielle Matrix

Die Biegewelle läßt sich als Überlagerung einer Drehwelle mit einer Scherwelle beschreiben, die miteinander geometrisch gekoppelt sind. Deshalb wird die Schallübertragung eines Biegewellenleiters durch die konjugierten akustischen Größenpaare (Quer-) Kraft und (Quer-) Schnelle, bzw. Biegemoment und Drehgeschwindigkeit beschrieben. Die Übertragungsmatrix ist eine Matrix des Ranges vier mit komplexwertigen Elementen. Für den nicht gekrümmten Biegewellenleiter mit homogenem Querschnitt gilt die in Gl. 1 vorgestellte differentielle Kettenmatrix /2/.

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ \Omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -j\omega\rho F dx & 0 & 0 \\ -j\omega \frac{1}{GF} dx & 1 & 0 & dx \\ -dx & 0 & 1 & -j\omega\rho I dx \\ 0 & 0 & -j\omega \frac{1}{EI} dx & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_0 \\ V_0 \\ M_0 \\ \Omega_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Bei dieser Darstellung wird ein rechtshändiges Koordinatensystem zugrunde gelegt, dessen Ursprung in der Mitte der Querschnittsfläche liegt; die Welle breitet sich in x-Richtung aus. In Gl. 1 bezeichnet K die Kraft und V die Schnelle in y-Richtung, M das Drehmoment und  $\Omega$  die Winkelgeschwindigkeit um die y-Achse, I das Flächenträgheitsmoment der Querschnittsfläche F um die y-Achse,  $\rho$  die Dichte, E den Elastizitätsmodul, G den Schermodul und  $\omega$  die Kreisfrequenz.

### 3. Finite Matrix

Zur Vorbereitung der Produktintegration der differentiellen Matrix unter allgemeinen Randbedingungen ist es hilfreich, neben den Wellenzahlen für die Drehwelle  $k_E = \omega\sqrt{\rho/E}$  und für die Scherwelle  $k_G = \omega\sqrt{\rho/G}$  die aus der Eigenwertgleichung der Matrix folgenden Wellenzahlen der Biegewelle  $\epsilon$  und  $\eta$  einzuführen.

$$\epsilon = j \sqrt{\frac{1}{2} \left( -(k_E^2 + k_G^2) + \sqrt{(k_E^2 - k_G^2)^2 - 4k_E^2 \frac{F}{I}} \right)} \quad (2)$$

$$n = j \sqrt{\frac{1}{2} \left( -(k_E^2 + k_G^2) - \sqrt{(k_E^2 - k_G^2)^2 - 4k_E^2 \frac{F}{I}} \right)} \quad (3)$$

Das Ergebnis der Produktintegration der differentiellen Kettenmatrix für den homogenen BiegeWellenleiter mit konstantem Querschnitt ist in Gl. 4 dargestellt. Da die inneren Verluste durch komplexe elastische Konstanten ausgedrückt werden, gilt Gl. 4 für den allgemeinen, verlustbehafteten BiegeWellenleiter.

#### 4. Numerische Eigenschaften

Die numerischen Eigenschaften der Übertragungsmatrix werden vor allem dadurch geprägt, daß die Wellenzahlen  $\epsilon$  und  $n$  komplexwertig sind; dies gilt eingeschränkt auch für den verlustlosen Wellenleiter. Die auftretenden Winkelfunktionen enthalten hyperbolische Anteile, die zu erheblichen numerischen Schwierigkeiten führen, weil bei der Berechnung der Matrixelemente Differenzen großer Zahlen auftreten.

Die Ursache für das Auftreten großer Zahlen sind die Imaginärteile der Wellenzahlen  $\epsilon$  und  $n$ , die in allen Summanden der Matrixelemente zu einem exponentiellen Anwachsen der Beträge mit zunehmender Länge des BiegeWellenleiters führen. Zur Abschätzung der numerischen Schwierigkeiten reicht es daher aus, das Verhalten der Imaginärteile von  $\epsilon$  und  $n$  zu untersuchen.

Die Wellenzahlen hängen vom Elastizitäts- und Schermodul, der Dichte, vom Trägheitsradius - der Quadratwurzel aus dem Verhältnis des Flächenträgheitsmomentes zur Querschnittsfläche - und von der Kreisfrequenz ab. Der Aspekt der Werkstoffabhängigkeit dieser Probleme soll im folgenden anhand der gemessenen Werte eines Aluminium- und eines Kupferwerkstoffes aufgezeigt werden. Aluminium zeichnet sich im Gegensatz zu Kupfer durch geringe innere Verluste aus. Die Verlustfaktoren für den Aluminiumwerkstoff sind für den E-Modul um den Faktor 4 und für den G-Modul um den Faktor 15 kleiner als die des Kupferwerkstoffes.

Ohne Berücksichtigung der Verluste sind die Imaginärteile beider BiegeWellenzahlen gleich. Für diesen Fall zeigt Abb. 1 die Abhängigkeit ihres Imaginärteils von der Frequenz für verschiedene Trägheitsradien. Oberhalb einer von Werkstoffdaten und Trägheitsradius abhängigen Grenzfrequenz bleiben die Imaginärteile null. Die Abhängigkeit dieser Grenzfrequenz vom Trägheitsradius zeigt Abb. 2.

Bei Berücksichtigung der Verluste teilen sich, wie Abb. 3 für Aluminium und Kupfer zeigt, die Äste für  $\epsilon$  und  $n$  im Bereich der Grenzfrequenz. Die Beträge wachsen für große Frequenzen proportional zur Frequenz. Das komplexe Verhältnis von Schermodul zu Elastizitätsmodul bestimmt, ob der Imaginärteil von  $\epsilon$  oder der von  $n$  im ganzen Frequenzbereich und für alle Trägheitsradien überwiegt.

Im Vergleich der Ergebnisse für beide Werkstoffe wird deutlich, daß der Einfluß der Verluste für die numerischen Probleme unterhalb der Grenzfrequenz keine Rolle spielt. Oberhalb der Grenzfrequenz führen die Verluste auch bei sehr großen Trägheitsradien zu großen Imaginärteilen in den Wellenzahlen.

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ V_1 \\ H_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 - \eta^2} \begin{bmatrix} (k_c^2 - \eta^2) \cos(sx) \\ -(k_c^2 - s^2) \cos(\eta x) \\ \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{s} \left( \frac{\rho}{GF} (k_c^2 - \eta^2) + \frac{\rho}{EI} \right) \sin(sx) \\ -\frac{1}{\eta} \left( \frac{\rho}{GF} (k_c^2 - s^2) + \frac{\rho}{EI} \right) \sin(\eta x) \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{l} -\frac{\rho}{EI} \cos(sx) \\ +\frac{\rho}{EI} \cos(\eta x) \end{array} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{s} (\rho F (k_c^2 - \eta^2)) \sin(sx) \\ -\frac{1}{\eta} (\rho F (k_c^2 - s^2)) \sin(\eta x) \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{l} -\rho F \cos(sx) \\ +\rho F \cos(\eta x) \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{s} k_\xi^2 F \sin(sx) \\ -\frac{1}{\eta} k_\xi^2 F \sin(\eta x) \end{array} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{s} (\rho I (k_\xi^2 - \eta^2) + \rho F) \sin(sx) \\ -\frac{1}{\eta} (\rho I (k_\xi^2 - s^2) + \rho F) \sin(\eta x) \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{l} (k_\xi^2 - \eta^2) \cos(sx) \\ -(k_\xi^2 - s^2) \cos(\eta x) \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{s} \left( \frac{\rho}{EI} (k_\xi^2 - \eta^2) \right) \sin(sx) \\ -\frac{1}{\eta} \left( \frac{\rho}{EI} (k_\xi^2 - s^2) \right) \sin(\eta x) \end{array} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{l} \rho F \cos(sx) \\ -\rho F \cos(\eta x) \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{l} s \sin(sx) \\ -\eta \sin(\eta x) \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{l} (k_\xi^2 - \eta^2) \cos(sx) \\ -(k_\xi^2 - s^2) \cos(\eta x) \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{l} (k_\xi^2 - \eta^2) \cos(sx) \\ -(k_\xi^2 - s^2) \cos(\eta x) \end{array} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_0 \\ V_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

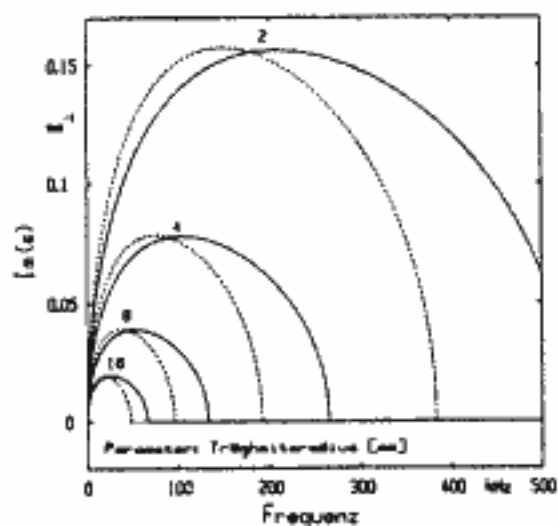


Abb. 1 Imaginärteile ohne Verluste. Aluminium (—), Kupfer (---)

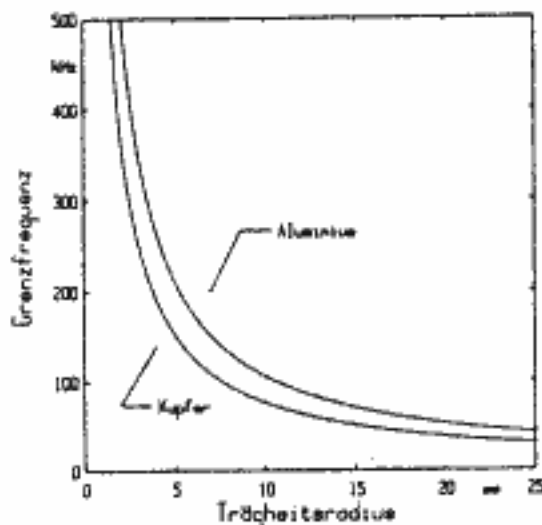


Abb. 2 Grenzfrequenz

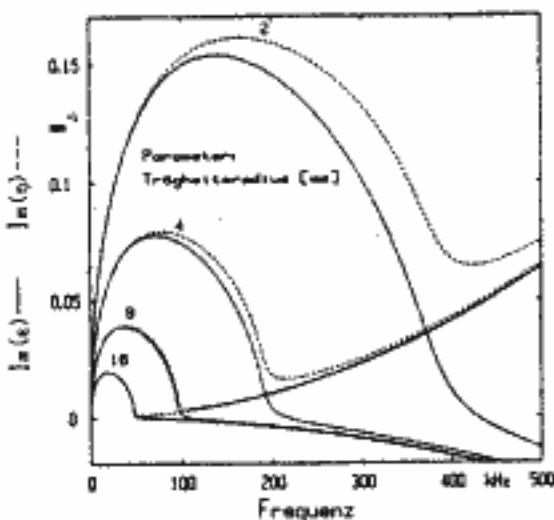
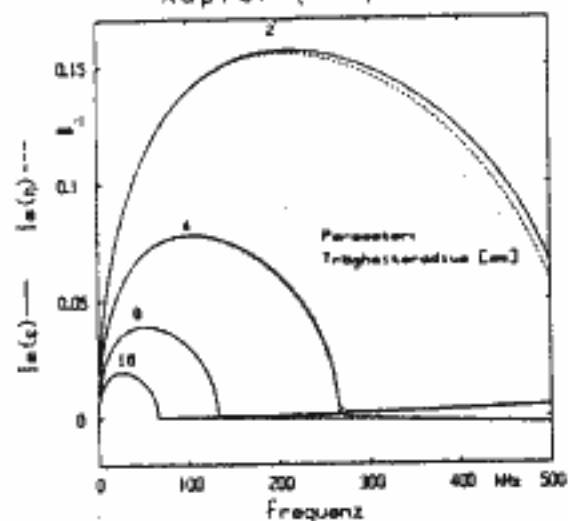


Abb. 3 Imaginärteile mit Verlusten, links Aluminium, rechts Kupfer

Bei Berechnungen für Anwendungen in der akustischen Energietechnik ist es wegen der oben dargestellten numerischen Probleme erforderlich, die Genauigkeit aller Zahlenwerte unter Kontrolle zu halten; in vielen Fällen reicht die Rechenbreite üblicher Rechner aus.

Da die integrierte Biegematrix von komplexwertigen höheren mathematischen Funktionen abhängt, die in Rechnern üblicherweise nicht mit der erforderlichen Genauigkeit implementiert sind, muß in der Praxis auf die numerische Produktintegration der differentiellen Matrix zurückgegriffen werden, bei der lediglich Multiplikationen und Additionen mit kontrollierter Genauigkeit gefordert werden.

## 5. Literatur

- 1/ J. Herbertz: Zur Charakterisierung von Übertragungselementen in der akustischen Energietechnik. Fortschritte der Akustik - DAGA'85
- 2/ J. Herbertz, K.-W. Hirsch: Zur Berechnung von Ultraschall-Schwingern mit Longitudinal-Biege-Kopplung. Fortschritte der Akustik. FASE/DAGA'82, VDI-Verlag Düsseldorf 1982, S. 795-798