

Zur mathematischen Darstellung der Richtcharakteristik einer Punktschallquelle

K.-W. HIRSCH, E. BUCHTA, M. TRIMPOP (Institut für Lärmschutz, Düsseldorf)

1. Einleitung

Im Hinblick auf die heute breite Einsatzmöglichkeit numerischer Rechenverfahren bei der Darstellung und Berechnung akustischer Probleme lohnt es sich, bereits bekannte, mathematische Methoden für den "praktischen Einsatz" neu zu beleuchten. Der Einsatz moderner Datenverarbeitung hat im Zusammenhang mit Lärmprognosen dazu geführt, daß die einschlägige Software die Vorschriften standardisierter Berechnungsverfahren - beispielsweise zur Wirkung von Vielfachreflexionen und -beugungen - mit einer sehr hohen, mathematischen Genauigkeit übersetzt.

In den Normen und Richtlinien wird dagegen die Richtwirkung von Schallquellen - wegen der häufig komplexen, zur Zeit der Konzeptionierung der Verfahren kaum standardisierbaren, analytischen Beschreibung von Richtcharakteristiken - gar nicht oder nur zweitrangig, i.e. pauschal bzw. implizit, berücksichtigt. Dies gilt für Verkehrs-, Flug-, Schießlärm usw., lediglich bei der Bestimmung der Schalleistung wird die gerichtete, räumliche Abstrahlung betrachtet. Für die Schallausbreitung im Freien ist die gerichtete, räumliche Abstrahlung aber insbesondere für die Berücksichtigung von Witterungseinflüssen von Bedeutung: Schräg nach oben abgehende Schallanteile bestimmen beispielsweise bei positiven Windgradienten wegen der zur Erdoberfläche gerichteten Beugung die Beiträge in größeren Entfernungen.

Diese im Grundsatz ungleichgewichtige Beschreibung von Effekten vergleichbaren Einflusses sollte im Lichte moderner Datenverarbeitung überwunden werden. Im folgenden wird deshalb eine mathematische Beschreibung der gerichteten Abstrahlung einer Punktschallquelle vorgestellt, die unter Benutzung numerischer Rechenverfahren auch in die Praxis Einzug finden kann.

2. Zur Beschreibung des Schallfeldes einer Punktschallquelle

Das Schallfeld im Aufpunkt \underline{x} einer Punktschallquelle am Ort \underline{x}_Q läßt sich durch eine allgemeine Funktion $Q(Q_0, \underline{x}, \underline{x}_Q)$ beschreiben. Darin ist Q_0 die Quellstärke, \underline{x} der Ortsvektor zum Aufpunkt und \underline{x}_Q der Ortsvektor zum Ort der Quelle. Q selbst steht hier für eine Feld- oder Energiegröße des Schallfeldes. Unter der Voraussetzung linearer Akustik läßt sich mit einem Separationsansatz für Q die Abhängigkeit des Schallfeldes vom Abstand d zwischen Quelle und Aufpunkt vom Einfluß der Richtung - beschrieben durch den azimuthalen Winkel φ und dem polaren Winkel θ zwischen Quelle und Aufpunkt trennen.

$$Q(Q_0, \underline{x}, \underline{x}_Q) = A(Q_0, d) \cdot R(\varphi, \theta)$$

A ist die Ausbreitscharakteristik der Quelle und R die Richtcharakteristik der Quelle. Für $A(Q_0, d)$ sind in den weitaus meisten Fällen geschlossene Ausdrücke bekannt, die das Schallfeld in Abhängigkeit vom Abstand beschreiben können. Diese Ausdrücke werden wiederum über Separationsansätze gefunden, deren Teilfunktionen einzeln eine physikalische Bedeutung beizumessen ist.

Für eine Punktschallquelle in Luft kann z.B. häufig angesetzt werden:

$$A(Q_0, d) = Q_0 \cdot \frac{1}{d^2} \cdot e^{-ad} \cdot \frac{1}{d^\epsilon}$$

Darin beschreibt Q_0 die Quellstärke, $1/d^2$ die geometrische Dämpfung, e^{-ad} die Absorption in Luft und $1/d^\epsilon$ einen zusätzlichen Dämpfungsterm. Die ersten drei Terme folgen aus allgemeinen theoretischen Modellen, der letzte Term ist eher ein pragmatischer Ansatz zur Anpassung der Funktion A an besondere Gegebenheiten. Mit dieser Darstellung für A läßt sich entweder bei bekannten Q_0 , a und ϵ das Schallfeld in einem Abstand d von der Schallquelle berechnen oder beim Vorliegen von Meßwerten für das Schallfeld der Parameter Q_0 und die Koeffizienten a und ϵ durch Regression auf den Ansatz A bestimmen.

Für die Richtcharakteristik $R(\varphi, \theta)$ wird analog zu $A(Q_0, d)$ eine geschlossene Darstellung benötigt, mit der sich entweder bei bekannten Koeffizienten das Schallfeld in einer Richtung (φ, θ) berechnen läßt oder beim Vorliegen von Meßwerten in verschiedenen Richtungen um die Schallquelle die Koeffizienten durch eine Regression auf die Funktion R bestimmen lassen.

Will man der Forderung nachkommen, jede mögliche Richtcharakteristik mit Hilfe eines allgemeingültigen Ansatzes für R geschlossen darstellen zu können, bietet sich an, die Funktion $R(\varphi, \theta)$ in einem vollständigen orthogonalen Funktionensystem darzustellen. Das sachgerechte Funktionensystem für Richtcharakteristiken ist das System der Kreisfunktionen bzw. das System der Kugel(flächen)funktionen.

3. Entwicklung nach Kreisfunktionen

Die Entwicklung nach Kreisfunktionen eignet sich zur Darstellung von Richtcharakteristiken in der Ebene (\mathbb{R}_2). Die Richtcharakteristik in \mathbb{R}_2 ist eine geschlossene Kurve, die in Parameterdarstellung vom azimuthalen Winkel φ angegeben ist. Die Eigenfunktionen Y_k^m des Kreisfunktionen-Systems sind die SINUS- ($m=0$) und COSINUS-Funktionen ($m=1$) des ganzzahligen Vielfachen des Winkels φ .

$$Y_k^0 = A_k^0 \sin k\varphi \quad \text{und} \quad Y_k^1 = A_k^1 \cos k\varphi$$

Zu den Eigenfunktionen gehören Koeffizienten A_k^m , die die Gewichtung der Eigenfunktion k bestimmen. Die COSINUS- und SINUS-Funktion mit gleichem k werden als Funktionen der k -ten Ordnung zusammengefaßt. Die Eigenfunktion Y_l nennt man die Eigenfunktion der l -ten Ordnung der Kreisfunktionen.

$$Y_k = A_k^0 \sin k\varphi + A_k^1 \cos k\varphi$$

Jede Richtcharakteristik $R(\varphi)$ kann als eine durch die Koeffizienten gewichtete Summe der Eigenfunktionen aller Ordnungen dargestellt werden. Alle Eigenschaften der Richtcharakteristik $R(\varphi)$ werden in die Koeffizienten

A_k^m abgebildet. Die Gesamtheit dieser Koeffizienten wird hier als Spektrum $S(\varphi)$ definiert. Die Darstellung von $R(\varphi)$ durch das Spektrum $S(\varphi)$ ist eindeutig. Das Spektrum ist diskret, d.h. es hängt ab von der Ordnung k und von m als Index für den Typ der Funktion.

$$S(m, k) = A_k^m$$

Im Falle des Systems der Kreisfunktionen gilt $0 \leq k \leq \infty$ und $0 \leq m \leq 1$. Es liegen also die beiden Teilspektren $S(k, 0)$ und $S(k, 1)$ vor. In Vorbereitung auf die Behandlung der Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen, bei denen m nicht mehr beschränkt ist, soll bereits hier eine allgemeinere Darstellung eines zweidimensionalen Spektrums $S(k, m)$ eingeführt werden. Dazu wird das zweidimensionale Spektrum $S(k, m)$ durch eine Parameterdarstellung in ein eindimensionales Spektrum überführt.

$$S(n) = S(k, m) \quad \text{mit} \quad n = 2k + m$$

Der Parameter n kann als Index für die Eigenfunktionen des Systems interpretiert werden. Abb. 1 zeigt als Beispiel die Entwicklung eines Quadrates bis zu den Kreisfunktionen 5. Ordnung.

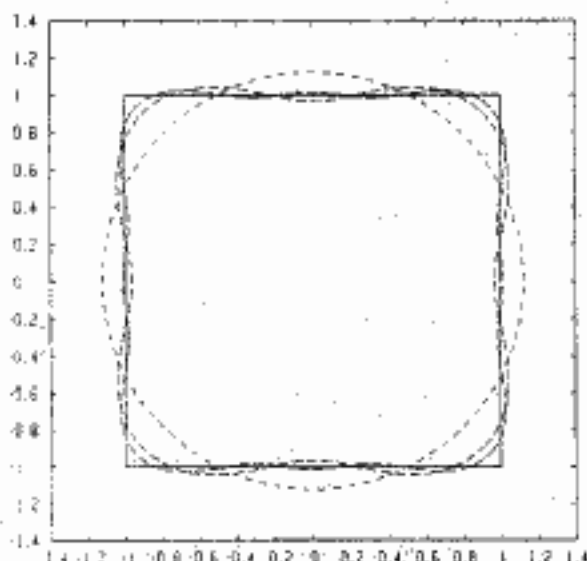


Abb. 1 Annäherung der Darstellung eines Quadrates durch eine Entwicklung nach Kreisfunktionen bis zur 5. Ordnung

4. Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen

Die Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen (KFF) eignet sich zur Darstellung von Richtcharakteristiken im dreidimensionalen Raum (\mathbb{R}_3). Die Richtcharakteristik in \mathbb{R}_3 ist eine geschlossene Fläche, die in der Parameterdarstellung vom azimuthalen Winkel φ und vom polaren Winkel θ angegeben ist. Die Eigenfunktionen Y_k^m des KFF-Systems sind die mit SINUS- bzw. COSINUS-Funktionen des Winkels φ gewichteten zugeordneten LEGENDRE-Polynome P_k^m (siehe /1/) des Arguments $\cos \theta$. Zu den Eigenfunktionen gehören Koeffizienten A_k^m , die die Gewichtung der Eigenfunktion Y_k^m bestimmen.

$$Y_k^m(\theta, \varphi) = A_k^m \cdot \begin{cases} P_k^m(\cos \theta) \cos m\varphi & \text{für } m = 0, 1, 2, \dots, k \\ P_k^{|m|}(\cos \theta) \sin |m|\varphi & \text{für } m = -1, -2, \dots, -k \end{cases}$$

Die Anzahl der Unterordnungen m je Ordnung k ist für KFF nicht konstant; m wächst mit der Ordnung. Der zweidimensionale Parameterraum wird mit Hilfe der Parameterdarstellung $n = k^2 + k - m$ in den eindimensionalen Index n der Eigenfunktionen überführt. Zur Veranschaulichung zeigt Abb. 2 die Flächen der ersten 9 Eigenfunktionen. In dieser polaren Darstellung läßt sich (s/w) das Vorzeichen in den einzelnen Bereichen nicht codieren. Deshalb wird das Vorzeichen in den einzelnen Bereichen durch ein "+" bzw. "-" notiert. Die folgende Tabelle enthält die analytischen Ausdrücke dieser Funktionen (ohne ihre Gewichtungskoeffizienten):

5.2 Wahl der Stützstellenlage

Es liegt nahe, im Hinblick auf eine optimale Abtastung die Stützstellen so zu wählen, daß sie gleiche Winkelbereiche repräsentieren. Im \mathbb{R}_2 ist der Vollkreis, im \mathbb{R}_3 der Raumwinkel in n gleiche Kreis- bzw. Kugeloberflächenelemente zu unterteilen und durch Stützstellen zu repräsentieren. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit läßt sich der Punkt $\theta_0 = \varphi_0 = 0$ stets mit einschließen, die Verteilung ist nicht eindeutig, sie läßt sich um die Achse $\theta = 0, \varphi = 0$ um beliebige Winkel drehen.

5.3 Ableitung einer Meßvorschrift

Aus der Wahl der Anzahl der Stützstellen und der Wahl der Verteilung ergibt sich für dreidimensionale Richtcharakteristiken eine allgemeine Meßvorschrift: Es sollte stets mit einer Anzahl von Stützstellen gearbeitet werden, die eine Quadratzahl ist. Die Stützstellen sollten (müssen aber nicht) gleichmäßig auf der Kugeloberfläche verteilt werden. In der Regel können Symmetrieeigenschaften der Quelle ausgenutzt werden, um die effektiv bei der Entwicklung zur Verfügung stehende Anzahl der Stützstellen zu vergrößern.

6. Bemerkungen zu den Vorteilen dieser Darstellung von Richtcharakteristiken

Wegen der Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen gilt für das Integral über die gesamte Kugeloberfläche

$$\int_{\text{Kugeloberfläche}} Y_i^0 Y_j^0 d\Omega = 0 \quad \text{für alle } i \text{ und } j <> 0$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\theta [^\circ]$	90	21	21	14	14	0	-48	-48	-48
$\varphi [^\circ]$	0	0	225	150	73	292	112	0	225
R	90	135	60	60	75	75	45	60	52,5

Tab. 1 Definition der zur Richtcharakteristik in Abb. 3 vorgegebenen Eingabedaten.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
l	0	1		2					
m	0	-1	0	1	-2	-1	-0	1	2
A_n	76,41	-2,22	-24,64	-26,07	0,08	0,25	-7,06	-11,43	-6,06

Tab. 2 Entwicklungskoeffizienten der Kugelflächenfunktionen zu der Richtcharakteristik in Abb. 3

Da Y_0^0 eine Konstante ist und der Ausdruck $\int_{\text{Kugeloberfläche}} Y_j^0 d\Omega$ die Schalleistung der Ordnung j repräsentiert, verschwindet der Beitrag aller höheren Ordnungen zur Leistung; A_0 ist also ein Maß für die Leistung. Die Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen ist also eine Methode, die sofort die Quelleistung bestimmt.

Die spektrale Darstellung einer Richtcharakteristik läßt sich zum Interpolieren zwischen Meßwerten und zur Darstellung einsetzen. Abb. 3 zeigt eine beliebig vorgegebene, auf der Basis von 9 Stützstellen definierte Richtcharakteristik. Tab. 1 definiert die zu dieser Richtcharakteristik vorgegebenen Eingabedaten. Tab. 2 enthält die Entwicklungskoeffizienten der Kugelflächenfunktionen.

Das Spektrum einer Richtcharakteristik kann in numerischen Berechnungsverfahren des Lärmschutzes dazu benutzt werden, Richtcharakteristiken von Punktschallquellen zu verwalten und Richtungskorrekturen lageabhängig zu berechnen.

7. Literatur

- /1/ Bronstein, Semedjajew
„Taschenbuch der
Mathematik“

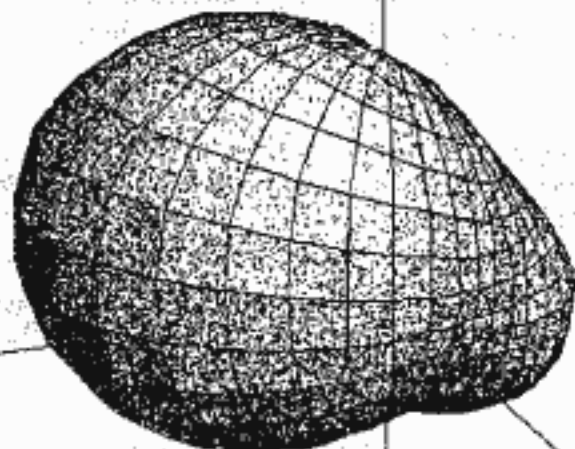


Abb. 3 Darstellung einer dreidimensionalen Richtcharakteristik, interpoliert auf der Basis der Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen

m	0. Ordnung	1. Ordnung	2. Ordnung
-2			$Y_4 = Y_{+2}^{-2}(\theta, \varphi) = 3 [1 - \cos^2 \theta] \sin(2\varphi)$
-1		$Y_1 = Y_{+1}^{-1}(\theta, \varphi) = [1 - \cos^2 \theta]^{1/2} \sin \varphi$	$Y_5 = Y_{+2}^{-1}(\theta, \varphi) = 3 \cos \theta [1 - \cos^2 \theta] \sin \varphi$
0	$Y_0 = Y_0^0(\theta, \varphi) = 1$	$Y_2 = Y_{+1}^0(\theta, \varphi) = \cos \theta$	$Y_6 = Y_{+2}^0(\theta, \varphi) = 1/2 [3 \cos^2 \theta - 1]$
+1		$Y_3 = Y_{+1}^{+1}(\theta, \varphi) = [1 - \cos^2 \theta]^{1/2} \cos \varphi$	$Y_7 = Y_{+2}^{+1}(\theta, \varphi) = 3 \cos \theta [1 - \cos^2 \theta]^{1/2} \cos \varphi$
+2			$Y_8 = Y_{+2}^{+2}(\theta, \varphi) = 3 [1 - \cos^2 \theta] \cos(2\varphi)$

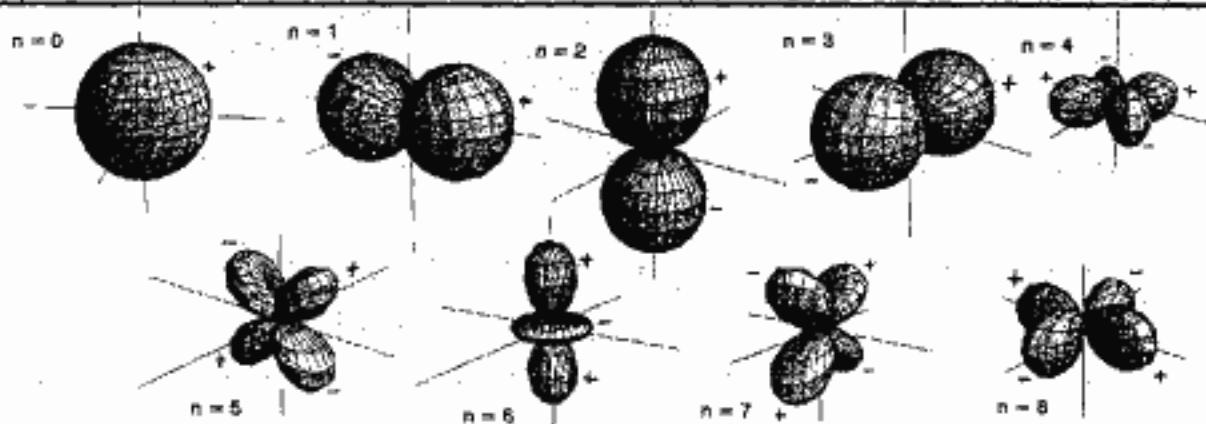


Abb. 2 Darstellung des Betrages der nullten bis zur achten Eigenfunktion des Systems der Kugelflächenfunktionen. (das Vorzeichen in den einzelnen Bereichen ist durch ein "+" bzw. "-" angedeutet)

Die Eigenfunktionen mit gleichem k werden als Funktionen der k -ten Ordnung zusammengefaßt.

$$Y_k(\theta, \varphi) = \sum_{m=-k}^k A_k^m Y_k^m(\theta, \varphi) \quad \text{mit } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$$

Jede Richtcharakteristik $R(\theta, \varphi)$ kann als eine durch die Koeffizienten gewichtete Summe der Eigenfunktionen aller Ordnungen dargestellt werden.

$$R(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k A_k^m Y_k^m(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n Y_n(\theta, \varphi)$$

Alle Eigenschaften der Richtcharakteristik $R(\theta, \varphi)$ werden in die Koeffizienten A_n abgebildet. Die Gesamtheit dieser Koeffizienten wird auch hier als Spektrum $S(\theta, \varphi)$ definiert. Die Darstellung von $R(\theta, \varphi)$ durch das Spektrum $S(\theta, \varphi)$ ist eineindeutig. Das Spektrum ist mit dem Index n diskret.

$$S(n) = A_n$$

5. Entwicklung bei abgetasteten Richtcharakteristiken

In der Regel liegt eine Richtcharakteristik nicht als kontinuierliche Funktion vor; beispielsweise durch Messung werden lediglich n Abtastwerte R_i an den Stützstellen θ_i, φ_i bestimmt.

$$R \rightarrow R_i(\varphi_i) \quad \text{in } \mathbb{R}_2 \quad \text{bzw.} \quad R \rightarrow R_i(\theta_i, \varphi_i) \quad \text{in } \mathbb{R}_3 \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Bei der Entwicklung solcher Richtcharakteristiken erhält man ein Gleichungssystem mit n Bestimmungsgleichungen für n Koeffizienten. Eine endliche Anzahl von Stützstellen führt daher zu einem endlichen Spektrum; die Zahl der Koeffizienten des Spektrums ist gleich der Zahl der Stützstellen.

5.1 Wahl der Stützstellenanzahl

Das Spektrum abgetasteter Richtcharakteristiken bleibt allerdings ohne Einschränkung der Allgemeinheit nicht eineindeutig. Entspricht die Anzahl der Stützstellen nicht der Anzahl der einer abgeschlossenen Ordnung, lassen sich die beteiligten Unterordnungen willkürlich wählen. Die Entwicklung bleibt eindeutig im Hinblick auf die Reproduktion der Stützstellen aus einem Spektrum. Aus den gegebenen Stützstellen lassen sich aber je nach Beteiligung der Unterordnungen verschiedene Spektren angeben. Die Eineindeutigkeit, d.h. eine geschlossene Ordnung liegt vor, im \mathbb{R}_2 , wenn eine gerade Anzahl von Stützstellen vorliegt und im \mathbb{R}_3 , wenn 1, 4, 9, 16, 25 ... (Quadratzahlen) Stützstellen vorliegen.